

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' Τ.Ε.Ε.



Γιάννης Γεωργούλης

Κυριάκος Σαλτερής

1^ο ΕΠΑΛ ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗΣ

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ:

$$\alpha^v = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$$

v φορές

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

1. $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^v = \alpha^{\mu+v}$
2. $\alpha^{\mu} \div \alpha^v = \left(\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^v} \right) = \alpha^{\mu-v}$
3. $(\alpha \cdot \beta)^v = \alpha^v \cdot \beta^v$
4. $\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^v = (\alpha \div \beta)^v = \frac{\alpha^v}{\beta^v}$
5. $(\alpha^{\mu})^v = \alpha^{\mu \cdot v}$
6. $\alpha^0 = 1$
7. $\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}$
8. $\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^v$
9. $(-1)^v = \begin{cases} -1, & \text{αν } v \text{ περιττός} \\ 1, & \text{αν } v \text{ άρτιος} \end{cases}$
10. $1^v = 1$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \\(\alpha - \beta)^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \beta \\(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) &= \alpha^2 - \beta^2 \\(\alpha + \beta)^3 &= \alpha^3 + 3 \cdot \alpha^2 \cdot \beta + 3 \cdot \alpha \cdot \beta^2 + \beta^3 \\(\alpha - \beta)^3 &= \alpha^3 - 3 \cdot \alpha^2 \cdot \beta + 3 \cdot \alpha \cdot \beta^2 - \beta^3 \\\alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 - \alpha \cdot \beta + \beta^2) \\\alpha^3 - \beta^3 &= (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha \cdot \beta + \beta^2) \\(\alpha + \beta + \gamma)^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + 2 \cdot \beta \cdot \gamma + 2 \cdot \alpha \cdot \gamma \\\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \beta \\\alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot (\alpha + \beta) \\(\alpha - \beta)^v &= (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^{v-1} + \alpha^{v-2} \cdot \beta + \dots + \alpha \cdot \beta^{v-2} + \beta^{v-1}) \text{ Διάγραμμα Newton}\end{aligned}$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟ

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad \text{με} \quad \alpha \neq 0$$

ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	ΡΙΖΕΣ	ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ	ΠΡΟΣΗΜΟ			
$\Delta > 0$	2 ριζες πραγματικές και άνυλεες τις $p_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ ή $p_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha (x - p_1)(x - p_2)$	$\alpha > 0$	x	$-\infty$	$+\infty$
			$f(x)$	+	0	+
			x	$-\infty$	p_1	p_2
			$f(x)$	-	0	-
			x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
			$f(x)$	+	0	+
			x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
			$f(x)$	-	0	-
$\Delta = 0$	1 ριζα πραγματική διπλή την $p_1 = p_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}$	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha (x - p_1)^2 = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$	$\alpha > 0$	x	$-\infty$	$+\infty$
			$f(x)$	+	0	+
			x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
			$f(x)$	-	0	-
			x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
			$f(x)$	+	0	+
$\Delta < 0$	δεν έχει πραγματικές ριζες	δεν παραγοντοποιείται στο $\mathbb{R}$ επειδή παίρνει τη μορφή: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{ \Delta }{4\alpha^2} \right]$	$\alpha > 0$	x	$-\infty$	$+\infty$
			$f(x)$	+	0	+
			x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
			$f(x)$	-	0	-
			x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
			$f(x)$	+	0	+
			x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
			$f(x)$	-	0	-

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

$f(x) > 0$	για κάθε $x \in \mathbb{R}$	αν και μόνο αν	$\Delta < 0$	και	$\alpha > 0$
$f(x) < 0$	για κάθε $x \in \mathbb{R}$	αν και μόνο αν	$\Delta < 0$	και	$\alpha < 0$
$f(x) \geq 0$	για κάθε $x \in \mathbb{R}$	αν και μόνο αν	$\Delta \leq 0$	και	$\alpha \geq 0$
$f(x) \leq 0$	για κάθε $x \in \mathbb{R}$	αν και μόνο αν	$\Delta \leq 0$	και	$\alpha \leq 0$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

$$a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$$

$$\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$$

$$\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$$

$$\log_a 1 = 0$$

και

$$\log_a a = 1$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log 10 = 1$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\log_a a^x = x$$

και

$$a^{\log_a \theta} = \theta$$

$$\log 10^x = x$$

$$10^{\log x} = x$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $k \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

1. $\log_a (\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$

2. $\log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$

3. $\log_a \theta^k = k \log_a \theta$

Αλλαγή βάσης

Αν $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha, \beta \neq 1$, τότε για κάθε $\theta > 0$ ισχύει: $\log_\beta \theta = \frac{\log_\alpha \theta}{\log_\alpha \beta}$

$$\log_\beta \theta = \frac{\log \theta}{\log \beta}$$

και

$$\log_\beta \theta = \frac{\ln \theta}{\ln \beta}$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Μεταβλητή : x_i [**ποιοτικές** (όταν δεν έχουμε αριθμούς), **ποσοτικές διακριτές** (όταν δεν μπορούμε να πάρουμε όλες τις ενδιάμεσες τιμές) και **ποσοτικές συνεχείς** (όταν μπορούμε να πάρουμε όλες τις ενδιάμεσες τιμές)],

Πληθυσμός ή δείγμα : $v = \sum_{i=1}^v v_i$, **Σχετική συχνότητα :** $f_i = \frac{v_i}{v}$,

Σχετική συχνότητα % : $f_i \% = \frac{v_i}{v} \cdot 100$,

Αθροιστική συχνότητα : $N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i$

Αθροιστική σχετική συχνότητα : $F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$

Αθροιστική σχετική συχνότητα % : $F_i \% = f_1 \% + f_2 \% + \dots + f_i \%$

Για να φτιάξουμε τις αθροιστικές στήλες γράφουμε:

$N_1 = v_1$, $N_2 = N_1 + v_2$, $N_3 = N_2 + v_3$ $N_K = N_{K-1} + v_K$ και όμοια
φτιάχνουμε και τις F_i και $F_i \%$

ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ

• **Μέση τιμή :** $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i}{v} = \sum_{i=1}^v f_i$ (όταν δεν έχουμε πίνακα συχνοτήτων)

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^K x_i \cdot v_i}{v} = \sum_{i=1}^K f_i \cdot v_i$ (όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων)

• **Διάμεσος :** αν v περιττός (μονός) έχουμε 1 μεσαίο και η $\delta = \frac{v+1}{2}$ όρος

αν v άρτιος (ζυγός) έχουμε δύο μεσαίους και η $\delta = \frac{\frac{v}{2} \text{ όρος} + \frac{v+1}{2} \text{ όρος}}{2}$

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!ΠΡΟΣΟΧΗ!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων για να βρούμε τη διάμεσο δεν κοιτάμε το x_i
δηλαδή την 1^η στήλη αλλά το v , για να δούμε πόσες είναι οι τιμές που έχουμε
και ανάλογα βρίσκουμε τη διάμεσο από την αθροιστική συχνότητα N_i .

Σε ομαδοποιημένα δεδομένα για να βρούμε τη διάμεσο κάνουμε διάγραμμα
αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων % (ενώνοντας τα δεξιά σημεία κάθε κουτιού
στο ιστόγραμμα) και όπου το 50% συναντήσει το διάγραμμα κατεβαίνουμε κάτω
στις μεταβλητές και βρίσκουμε τη διάμεσο.

- **Επικρατούσα τιμή E.T. :** M_o = η τιμή της μεταβλητής με τη μεγαλύτερη συχνότητα . Σε ομαδοποιημένα δεδομένα για να βρούμε την E.T. φτιάχνουμε διάγραμμα συχνοτήτων (ενώνουμε τα κέντρα των κουτιών στο ιστόγραμμα) και κάνουμε το «X» ενώνοντας 4 σημεία (1-3 και 2-4), 1 το τέλος του προηγούμενου, 2 και 3 τα σημεία του ψηλότερου κουτιού και 4 την αρχή του επόμενου κουτιού και στο σημείο που συναντούνται οι χιαστί γραμμές κατεβαίνουμε κάτω στις μεταβλητές και βρίσκουμε τη διάμεσο.
- **ΣΧΟΛΙΑ: 1.** Στις ποιοτικές μεταβλητές ΔΕΝ μπορούμε να βρούμε μέση τιμή και διάμεσο, παρά μόνο επικρατούσα τιμή.
2. Το πιο αντιπροσωπευτικό μέτρο θέσης είναι η μέση τιμή καθώς λαμβάνει υπόψην της όλες τις τιμές της μεταβλητής, ενώ η διάμεσος δεν λαμβάνει υπόψην της τις ακραίες τιμές παρά μόνον τις μεσαίες.

ΜΕΤΡΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

- **Εύρος :** R = Μεγαλύτερη τιμή – μικρότερη τιμή. Σε ομαδοποιημένα δεδομένα για να βρούμε το εύρος δεν χρησιμοποιούμε τα κέντρα αλλά την μικρότερη τιμή της 1^{ης} κλάσης και τη μεγαλύτερη τιμή της τελευταίας κλάσης ισοδυναμίας.

- **Διακύμανση :** $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2}{v}$ (όταν δεν έχουμε πίνακα συχνοτήτων)

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i}{v} \quad (\text{όταν } \underline{\text{έχουμε}} \text{ πίνακα συχνοτήτων})$$

- **Τυπική απόκλιση :** $s = \sqrt{s^2}$
- **Συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας :** $C.V. \% = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$

Όταν ο C.V. είναι μικρότερος του 10% λέμε ότι το δείγμα είναι ομοιογενές, ενώ όταν ο C.V. είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 10% λέμε ότι το δείγμα είναι ανομοιογενές. Στην περίπτωση που η μέση τιμή $\bar{x}$ είναι αρνητική ($\bar{x} < 0$), τότε για να βρούμε τον C.V. χρησιμοποιούμε την απόλυτη τιμή $|\bar{x}|$ που είναι θετική.

ΜΑΘΕΤΕ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΓΙΑ ΝΑ ΜΠΟΡΕΙΤΕ ΝΑ ΛΥΝΕΤΕ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γ.Γ.

1ο Τ.Ε.Ε. ΣΥΡΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΚΥΚΛΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

1. Σε ερώτηση ποιο μέσο προτιμάτε για να ταξιδέψετε από Αθήνα στη Θεσσαλονίκη δόθηκαν οι ακόλουθες απαντήσεις:

Μεταφορικό μέσο	Συχνότητα v_i	Σχ.συχν. $f_i\%$
Αεροπλάνο	6	
Λεωφορείο	8	
Τρένο	4	
Αυτοκίνητο	2	
Σύνολο		

Να συμπληρώσετε τον πίνακα και να κατασκευάσετε :

- i) Το ραβδόγραμμα
ii) Το κυκλικό διάγραμμα

2. Μια εταιρεία έκανε καταμέτρηση του αριθμού των μελών της οικογένειας κάθε υπαλλήλου της έτσι, ώστε να κάνει αυξήσεις στους μισθούς. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα:

Αριθμός μελών χ_i	Συχνότητα (v_i)	Αθρ. Συχν. N_i	Σχετική συχνότητα (f_i)	Σχετική συχνότητα % $(f_i\%)$	Αθρ. Σχετ. Συχν. $F_i\%$
0	4				
1	19				
2	21				
3	2				
4	2				
5	2				
Σύνολα					

- Α) Να συμπληρωθεί ο πίνακας.
Β) Πόσες οικογένειες και σε ποιο ποσοστό έχουν 2, 3 ή 4 μέλη;
Γ) Η εταιρεία αποφασίζει να αυξήσει τους μισθούς των υπαλλήλων που η οικογένειά τους έχει τουλάχιστον 2 μέλη, κατά 32 ευρώ. Ποίο είναι το ποσό με το οποίο θα επιβαρυνθεί η εταιρεία;

3. Ο υπεύθυνος της Α΄τάξης ενός Σχολείου κατέγραψε των αριθμό των ηερών απουσίας των μαθητών κατά το 1^ο τετράμηνο. Τα αποτελέσματα έχουν ως εξής:

Ημέρες απουσίας χ_i	Μαθητές Συχνότητα (ν_i)	Αθρ. Συχν. N_i	Σχετική συχνότητα (f_i)	Σχετική συχνότητα % ($f_i\%$)	Αθρ. Σχετ.Συχν. $F_i\%$
2	9				
3	13				
4	9				
5	6				
6	2				
7	1				
Αθροίσματα					

- A) Να συμπληρωθεί ο πίνακας
 B) Πόσοι μαθητές απουσίασαν το πολύ μέχρι 4 μέρες;
 Γ) Ο υπεύθυνος καθηγητής ισχυρίζεται ότι το 22,5% των μαθητών απουσίασε από 5 έως 7 ημέρες. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του ;

4.

Μαθήματα χ_i	ν_i	$f_i\%$
Αρχαία	6	
Νέα		5
Αγγλικά	8	
Μαθηματικά	8	
Φυσική	10	25
Χημεία		
Σύνολα		

Ο πίνακας παρουσιάζει τους ανεξεταστέους μαθητές της Α΄ Λυκείου. Να συμπληρώσετε τον πίνακα αυτό.

5.

Κόμματα	Συχνότητα ν_i (ψήφοι)	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
A	3.000	
B		50
Γ		
Δ	2.010	10
Σύνολα		100

Τα αποτελέσματα των εκλογών σε ένα εκλογικό τμήμα είναι στον παρακείμενο πίνακα. Πόσους ψήφους πήρε καθένα από τα κόμματα A, B, Γ και Δ;

6. Χρησιμοποιώντας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων, που δίνει την κατανομή του αριθμού απουσίας 50 εργαζομένων από την εργασία τους λόγω ασθένειας, να βρεθεί :

Αριθμός ημερών x_i	Συχνότητα v_i
0	12
1	8
2	5
3	4
4	5
5	8
6	0
7	5
8	2
9	1
ΣΥΝΟΛΑ	

- i) Η επικρατούσα
Το εύρος
Η διάμεσος
Η μέση τιμή
Η τυπική απόκλιση
Ο συντελεστής μεταβλητότητας CV
- ii) ο αριθμός και το ποσοστό των εργαζομένων που απουσίασαν :
Α) τουλάχιστον 1 ημέρα
Β) πάνω από 5 ημέρες
Γ) από 3 έως 5 ημέρες
Δ) το πολύ 5 ημέρες
Ε) ακριβώς 5 ημέρες.

7. Α. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον πίνακα των τιμών της μεταβλητής X σωστά συμπληρωμένο.

Τιμές μεταβλητής x_i	Συχνότητα v_i	Σχετ. συχνότητα f_i	Σχετ. συχνότητα $f_i, \%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$x_i \cdot v_i$
1	10				10
2				35	
3					
ΣΥΝΟΛΟ	$v=50$	1	100	-	

- Β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων.

8. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα :

x_i	v_i	f_i	Αθροιστ. Συχν. N_i	Σχετ. αθρ. Συχν. F_i	$f_i, \%$	Σχ. αθρ. Συχν. $F_i, \%$
1						10
2	4	0,20	6			
3				0,60		
4					25	
5	2					
6						
Σύνολο						

9.

Αριθμός Παιδιών x_i	Αριθμός Οικογενειών v_i
0	7
1	8
2	15
3	5
4	4
5	1
Σύνολο	

- i) Να συμπληρώσετε τον πίνακα με
στήλες σχετ.συχνοτήτων,
αθροιστικών συχνοτήτων,
σχετ.αθροιστ. συχνοτήτων,
σχετικών συχν. τοις %,
σχετ.αθροιστ. συχνοτ. τοις %
- ii) Να βρείτε τη μέση τιμή
- iii) Να βρείτε τη διάμεσο
- iv) Να βρείτε την επικρατούσα
- v) Να κατασκευάσετε πολύγωνο
συχνοτήτων και αθροιστικών
συχνοτήτων.

10. Ο διπλανός πίνακας δίνει την κατανομή
του χρόνου X σε sec 60 μαθητών που χρειάστηκαν, για
να τρέξουν μια δεδομένη απόσταση.
Να υπολογιστούν :
Ο μέσος , ο διάμεσος και ο επικρατέστερος χρόνος για
την κάλυψη της συγκεκριμένης απόστασης.

x_i	v_i
50	4
55	6
60	8
65	12
70	14
75	10
80	6
Σύνολο	

11. Έξι διαδοχικοί άρτιοι αριθμοί έχουν μέση τιμή 15.
Να βρείτε τους αριθμούς και τη διάμεσό τους.
12. Σε ένα διαγώνισμα μαθηματικών οι δέκα μαθήτριες του τμήματος
βρεφοκομίας ήταν : 7, 11, 10, 13, 15, 3, 12, 11, 4, 14.
Να υπολογίσετε:
- i) Την επικρατούσα τιμή
 - ii) Τη μέση τιμή
 - iii) Τη διάμεσο
 - iv) Το εύρος
 - v) Την τυπική απόκλιση
 - vi) Το συντελεστή μεταβλητότητας.
13. Για τα παρακάτω δεδομένα : 6,14,10,9,11, να υπολογιστούν :

- i) Η μέση τιμή
- ii) Η διάμεσος
- iii) Η διακύμανση
- iv) Η τυπική απόκλιση
- v) Ο συντελεστής μεταβλητότητας. Είναι ομοιογενές το δείγμα;

14. Από τους υπαλλήλους μιας επιχείρησης οι 5 έχουν μέσο μισθό 2490 Ευros., οι 6 έχουν μέσο μισθό 2800 Ευros και οι υπόλοιποι 4 έχουν 3600. Να βρείτε το μέσο μηνιαίο μισθό όλων των υπαλλήλων της επιχείρησης.
15. Το μέσο ύψος 9 καλαθοσφαιριστών μιας ομάδας είναι 205 cm.
 Α) Για να ψηλώσει την ομάδα ο προπονητής πήρε ακόμη ένα παίκτη 216 Cm. Ποιο είναι το νέο μέσο ύψος της ομάδας;
 Β) Αν ήθελε ο προπονητής να ψηλώσει την ομάδα στα 208 cm, πόσο ύψος έπρεπε να έχει ο καλαθοσφαιριστής που πήρε;
16. Η μέση ηλικία 18 αγοριών και 12 κοριτσιών μιας τάξης είναι 15,4 χρόνια. Εάν η μέση ηλικία των αγοριών είναι 15,8 χρόνια, να βρείτε τη μέση ηλικία των κοριτσιών.
17. Πέντε αριθμοί έχουν διάμεσο $\delta=6$ και μέση τιμή $\bar{x} = 6$. Ο τρεις από αυτούς τους αριθμούς είναι οι 5, 8, 9. Να βρείτε τους άλλους δύο.
18. Επτά αριθμοί έχουν μέσο όρο 8. Οι τρεις από τους αριθμούς είναι οι 12, 14, και 10. Να βρείτε τους υπολοίπους 4 αριθμούς, αν γνωρίζετε ότι οι αριθμοί αυτοί διαφέρουν κατά 2
19. Σε ένα τελωνείο υπάρχουν 10 προϊόντα που κοστίζουν, χωρίς τους φόρους, 10, 12, 6, 14, 16, 18, 16, 18, 16, 8 χιλ. ευρώ αντίστοιχα.
 i) Ποια είναι η επικρατούσα, η μέση τιμή και η διάμεσος των προϊόντων αυτών;
 ii) Πως μεταβάλλονται οι παραπάνω τιμές αν προσθέσουμε και φόρο 15%;

↓ 20.

χ_i	ν_i
2	1
3	3
4	1
5	2
6	;
7	1
Σύνολο	

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες συχνότητες. Η πέμπτη συχνότητα χάθηκε!! Μπορείτε να τη βρείτε αν γνωρίζετε ότι:

- i) Υπάρχουν δύο επικρατέστερες.
 ii) Η μέση τιμή είναι 4,4
 iii) Η διάμεσος είναι $\delta=4,5$

21. Κατά την απογραφή του 2001 η ΕΣΥΕ κατέγραψε τις ηλικίες των ατόμων ενός ορεινού χωριού. Αφού έκανε κατανομή των ηλικιών σε 5 κλάσεις, προέκυψε ο πίνακας:

κλάσεις x_i [,)	Συχνότ v_i	Κεντρ. Τιμή χ_i	Σχετικ συχν. f_i	Σχ.συχ $f_i\%$	Αθροισ Συχνότ N_i	Σχετ.αθρ Συχνότ. F_i	$x_i \cdot v_i$
0-10	5						
10-20	15						
20-30	20						
30-40	25						
40-50	30						
50-60	35						
60-70	40						
70-80	20						
80-90	10						
Σύνολο							

- A) Να συμπληρωθεί ο παραπάνω πίνακας
 B) Να κατασκευαστεί το πολύγωνο συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.
 Γ) Να βρεθεί η μέση τιμή, η διάμεσος, και η επικρατούσα.
 Δ) Πόσοι κάτοικοι και σε τι ποσοστό είναι κάτω από 60;
 Ε) Πόσοι κάτοικοι και σε τι ποσοστό είναι τουλάχιστον 60;

✓ 22.

Επισκέψεις	Συχνότητα
[0-2)	8
2-4	12
4-6	10
6-8	6
8-10	4
Σύνολο	

Ο διπλανός πίνακας δίνει τις ετήσιες επισκέψεις σε μουσεία. Να υπολογίσετε :

- i) Τη μέση τιμή
 ii) Την επικρατούσα τιμή
 iii) Τη διάμεσο

23. Σε ένα βιβλιοπωλείο ένας υπάλληλος τοποθέτησε μία σειρά βιβλίων ανάλογα με τον αριθμό των σελίδων τους. Τα δεδομένα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Σελίδες x_i	Συχνότ v_i	Κεντρ. Τιμή x_i	Σχετικ συχν. f_i	Αθροισ Συχνότ N_i	Σχετ.αθρ Συχνότ. F_i	Σχ.συχ $f_i\%$	$X_i \cdot v_i$
[100-150)	7						
150-200	5						
200-250	20						
250-300	3						
300-350	15						
Σύνολο				ξ			

- Να συμπληρωθεί ο πίνακας
- Να βρεθεί η μέση τιμή
- Να βρεθεί η διάμεσος
- Να βρεθεί η επικρατούσα τιμή
- Πόσα βιβλία έχουν λιγότερες από 250 σελίδες;
- Πόσα βιβλία έχουν τουλάχιστον 200 σελίδες;

24. Ρωτήσαμε 60 άτομα πόσα CD έχουν στο σπίτι τους. Δόθηκαν απαντήσεις που κυμαίνονται από 0-40 και φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

κλάση x_i	Συχνότ v_i	Κεντρ. Τιμή x_i	Σχετικ συχν. f_i	Αθρ. Συχνότ N_i	Σχετ.αθρ Συχνότ. F_i	Σχ.συχ $f_i\%$	$v_i \cdot x_i$
[0-8)	10						
8-16	12						
16-24	14						
24-32	18						
32-40	6						
Σύνολο							

- Να συμπληρωθεί ο πίνακας
- Να βρεθεί η μέση τιμή
- Να βρεθεί η διάμεσος
- Να βρεθεί η επικρατούσα τιμή

- ✓ 25. Η μέση τιμή των παρατηρήσεων : 1, 2, 4, 2, 3, $2x$, $x+2$, 3, 4, είναι 5. Να βρείτε :
- Τον αριθμό x
 - Το εύρος των παρατηρήσεων
 - Τη διάμεσο
 - Την τυπική απόκλιση και
 - Τον συντελεστή μεταβλητότητας.

- ✓ 26. Ένας μαθητής έχει μέσο όρο 13 σε 5 βασικά μαθήματα. Αν ο μικρότερος από τους 5 βαθμούς είναι 9, πόσο πρέπει να γίνει αυτό το 9 στο επόμενο τετράμηνο, ώστε ο μέσος όρος των 5 μαθημάτων να γίνει 14;

27. Ένας μαθητής είχε στο Α' τετράμηνο μέσο όρο βαθμολογίας 16, στα 12 μαθήματά του. Στο Β' τετράμηνο ανέβασε κατά 2 μονάδες τα 4 και μείωσε κατά 1 μονάδα τα 2 από τα 12 μαθήματα. Τα υπόλοιπα μαθήματα παρέμειναν αμετάβλητα. Ποιος είναι ο μέσος όρος της βαθμολογίας του Β' τετραμήνου;

28. Ένας μαθητής έχει σε 4 μαθήματα μέσο όρο βαθμολογίας 16 και στα υπόλοιπα μαθήματα μέσο όρο 12. Αν ο γενικός μέσος όρος των μαθημάτων του μαθητή είναι 13,6, πόσα είναι όλα τα μαθήματα;

✓ 29.

Βάρος σε κλά [-)	Αθροιστική Σχετική συχν. F_i
45-55	0,2
55-65	0,5
65-75	
75-85	
Σύνολα	

Στον παραπλεύρως πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ' τάξης ενός Σχολείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

A. Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη κλάση.

B. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων.

✓ 30.

Απουσίες χ_i	Μαθητές ν_i
10	x
20	$\psi = 70 - x$
30	5
	75

Στον πίνακα παρουσιάζονται οι απουσίες 75 μαθητών της Γ' τάξης. Αν γνωρίζουμε ότι ο μέσος όρος των απουσιών της τάξης είναι 12,

- Να συμπληρωθεί ο πίνακας.
- Να βρείτε διακύμανση
- Να βρείτε το συντελεστή μεταβλητότητας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 6}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1}$

β) Ομοίως τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 2x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^3 - 5x}{x^2 - 3x + 2}$

ΘΕΜΑ 2^ο

α) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 4x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 27}$

β) Ομοίως τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 - 9}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 - 20x}{x^2 + x - 2}$

ΘΕΜΑ 3^ο

α) Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

β) ομοίως τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{5x - 5}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{4-x} - 3}$

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+16} - 4}{x}$

β) ομοίως τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+9} - 2}{5x - 10}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{\sqrt{2-x} - 3}$

ΘΕΜΑ 5^ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 - 1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να βρείτε τα όρια της f στα σημεία $x=1$ και $x=-1$

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

ΘΕΜΑ 6^ο

Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x^2+9} - 3}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 1}$

v) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$

ΘΕΜΑ 7^ο

Βρείτε τις τιμές του πραγματικού α, έτσι ώστε να υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \quad \text{με } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & x < 1 \\ x^2 + \alpha x - 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 8^ο

Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$, να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} [5f^3(x) - 2g^2(x) - 23]^{2004}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x) - 2g(x) + 1}{\sqrt{f^2(x) + g^2(x)} + 3}$

$$\text{iii)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{f^2(x) + 7g(x)}{6f(x)g(x)}}$$

$$\text{iv)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 4f(x) + 4}{f(x) - 2}$$

$$\text{v)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 3}{\sqrt{g(x) - 2} - 1}$$

ΘΕΜΑ 9^ο

α) Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ x + 1, & 0 < x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \end{cases}$$

Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και τις αριθμητικές τιμές $f(0)$ και $f(1)$. Στη συνέχεια να γίνει μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Είναι η f συνεχής στα σημεία $x=0$ και $x=1$;

β) Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 7, & x < 1 \\ a^2x - 4ax - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Να προσδιοριστεί η τιμή του πραγματικού a , ώστε να υπάρχει το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

ΘΕΜΑ 10^ο

α) Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq -1 \\ x + 3, & -1 < x < 1 \\ -4, & 1 \leq x \end{cases}$$

Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και τις αριθμητικές τιμές $f(-1)$ και $f(1)$. Στη συνέχεια να γίνει μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Είναι η f συνεχής στα σημεία $x=-1$ και $x=1$;

β) Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2, & x < 2 \\ ax^2 - 5a^2x + 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

Να προσδιοριστεί η τιμή του πραγματικού a , ώστε να υπάρχει το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

ΘΕΜΑ 11^ο

Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια, στο πεδίο ορισμού τους, τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$i) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}, & x \neq -2 \\ -3, & x = -2 \end{cases}$$

$$ii) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$$

$$iii) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & x > 1 \\ 2x^2 - 3, & x \leq 1 \end{cases}$$

$$iv) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}, & x < 2 \\ \sqrt{x+2} - 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 12^ο

α) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -x + 1, & x > 0 \end{cases}$

Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια, στο πεδίο ορισμού της, και να γίνει η γραφική της παράσταση.

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 5ax - 2, & x < 2 \\ -2x^2 + 2ax + 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Να βρεθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax + \beta, & x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ 2ax^2 - \beta, & x > 1 \end{cases}$

Να προσδιορίσετε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

ΘΕΜΑ 13^ο

α) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -2x^2, & x \leq 0 \\ 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$

Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια, στο πεδίο ορισμού της, και να γίνει η γραφική της παράσταση.

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^3 - 2, & x < -2 \\ -2x + 2ax^2 + 1, & x \geq -2 \end{cases}$$

Να βρεθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών.

β) Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha x + \beta, & x < 3 \\ 10, & x = 3 \\ \alpha x + 3\beta, & x > 3 \end{cases}$$

Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

ΘΕΜΑ 14^ο Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (x-k) \cdot (x+k), & x \leq 2 \\ kx + 5, & x > 2 \end{cases}$, να προσδιοριστεί ο πραγματικός k , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x=2$.

ΘΕΜΑ 15^ο Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x + \beta x - 1^2, & x < 1 \\ 5, & x = 1 \\ \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των πραγματικών α και β για τις οποίες η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

ΘΕΜΑ 16^ο α) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - 3x^2 + x - 2] = -4$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

ΘΕΜΑ 17^ο α) Αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 5$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x}{x-1} = 10$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

ΘΕΜΑ 18^ο Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + \beta}{x-1} = 6$, να βρείτε τους πραγματικούς α και β .

ΘΕΜΑ 19^ο Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο σύνολο στο $x=2$ και επιπλέον ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2004$. Να βρείτε το $f(2)$.

ΘΕΜΑ 20^ο Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x-3}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Να βρεθεί η τιμή $f(3)$.

ΘΕΜΑ 21^ο Ομοίως η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $(x^2 - 1) \cdot f(x) = \sqrt{x} - 1$ για κάθε $x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$. Αν η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, να βρεθεί η τιμή $f(1)$.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

ΚΑΝΟΝΕΣ

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ



$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$(\alpha \cdot f(x))' = \alpha \cdot f'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$$(c)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(\alpha x)' = \alpha$$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\alpha^x)' = \alpha^x \cdot \ln \alpha$$

$$(\eta \mu x)' = \sigma \upsilon \nu x$$

$$(\sigma \upsilon \nu x)' = -\eta \mu x$$

$$(\epsilon \phi x)' = \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x}$$

$$(\sigma \phi x)' = \frac{-1}{\eta \mu^2 x}$$

$$\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Αν $u=f(x)$, τότε ισχύουν:

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΣΥΝΘΕΤΩΝ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$(\eta \mu u)' = u' \cdot \sigma \upsilon \nu u$$

$$(\sigma \upsilon \nu u)' = -u' \cdot \eta \mu u$$

$$(\epsilon \phi u)' = \frac{u'}{\sigma \upsilon \nu^2 u}$$

$$(\sigma \phi u)' = \frac{-u'}{\eta \mu^2 u}$$

$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(\alpha^u)' = u' \cdot \alpha^u \cdot \ln \alpha$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$$

$$\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{c}{u} \right)' = -\frac{c \cdot u'}{u^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

ΘΕΜΑ 1° Να γράψετε τον πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρωθεί η στήλη B του πίνακα με τις παραγώγους των συναρτήσεων της στήλης A :

Στήλη A Συνάρτηση $f(x)$	Στήλη B Παράγωγος $f'(x)$
$x^a, a \in \mathbb{R}^*, x > 0$	
e^x	
$\ln x, x > 0$	
$f(x) \pm g(x)$	
$c \cdot f(x), c = \text{σταθερά}$	
$f(x) \cdot g(x)$	
$\frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	
$f(g(x))'$	

ΘΕΜΑ 2° Να αντιστοιχίσετε τα γράμματα της στήλης A με τους αριθμούς της στήλης B που αντιστοιχούν στη σωστή απάντηση.

Στήλη A Συνάρτηση $f(x)$	Στήλη B Παράγωγος $f'(x)$
α. a	1. 0
β. ax	2. a
γ. $\beta x + a$	3. β
δ. $ax^2 + \beta$	4. $ax + \beta$
ε. βx^2	5. $2ax$
στ. $ax^2 - \beta x$	6. $2\beta x + \gamma$
ζ. $\beta x^2 + ax - \gamma$	7. $2\beta x$
	8. $2ax - \beta$
	9. $2\beta x + a$
	10. $2ax + \beta$

ΘΕΜΑ 3^ο: Να αντιστοιχίσετε τα γράμματα της στήλης Α με τους αριθμούς της στήλης Β που αντιστοιχούν στη σωστή σχέση.

Στήλη Α Συνάρτηση $f(x)$	Στήλη Β Παράγωγος $f'(x)$
α. $f(x) = \eta\mu x$	1. $f'(x) = f(x)$
β. $f(x) = e^x$	2. $f''(x) = -f(x)$
γ. $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$	3. $f'(x) = -f(x)$
δ. $f(x) = e^{-x}$	4. $f'''(x) = 0$
	5. $f'''(x) = c, c \in \mathbb{R}$
	6. $f'(x) = 0$

ΘΕΜΑ 4^ο Να αντιστοιχίσετε τα γράμματα της στήλης Α με τους αριθμούς της στήλης Β που αντιστοιχούν στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α Συνάρτηση $f(x)$	Στήλη Β Παράγωγος $f'(x)$
α. $\frac{3}{2}x^2 - 5x + \sqrt{2}$	1. $\ln x$
β. $\frac{3}{x^7}$	2. $\frac{1 - \ln x}{x^2}$
γ. $\frac{x^4}{4}$	3. $3x - 5$
δ. $x \cdot e^x$	4. $\frac{1 - x}{e^x}$
ε. $\frac{x}{e^x}$	5. $\frac{-21}{x^8}$
στ. $\frac{\ln x}{x}, x > 0$	6. x^3
ζ. $x \cdot \ln x - x, x > 0$	7. $e^x(1 + x)$

ΘΕΜΑ 5°

Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων στο αντίστοιχο σημείο:

i) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 7$ στο $x=-1$

ii) $g(x) = \frac{x^2 - 5x}{10}$ στο $x=2$

iii) $h(x) = \frac{\sqrt{10}}{x^{10}}$ στο $x=-1$ iv) $s(\omega) = \omega^2 + \frac{1}{\omega^2}$ στο $\omega=2$

ΘΕΜΑ 6°

Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = -\frac{2}{5}x^{20}$ ii) $g(x) = x^2 + 5 + \frac{3}{x}$

iii) $h(x) = 8x^5 - \ln x + 10, x > 0$ iv) $t(\theta) = (\theta^3 + 1)(\theta^4 + 1)$

v) $\varphi(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega + 1}$

ΘΕΜΑ 7°

Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = -\frac{3}{x^9}$ ii) $f(x) = \sqrt{x}, x > 0$

iii) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}, x > 0$ iv) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3}}, x > 0$

v) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{4x}{5} + \sqrt{5} - \ln 2, x > 0$

vi) $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2}{5} - \frac{1}{3x}$

ΘΕΜΑ 8°

Ομοίως τις παραγώγους των συναρτήσεων :

i) $f(x) = \frac{5-x}{x+3}$ ii) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

iii) $f(x) = \frac{2x+1}{e^x}$ iv) $f(x) = \varepsilon\varphi x, \sin x \neq 0$

v) $f(x) = x \cdot \sin x - x \cdot \eta\mu x$ vi) $f(x) = x^3 \cdot (x^2 + x) \cdot \ln x, x > 0$

vii) $f(x) = 2x^3 \cdot \ln x - \frac{x+1}{\ln x}, x > 0$

ΘΕΜΑ 9°

Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^3 + \eta \mu x$

ii) $f(x) = \frac{\alpha x^4}{12} - \frac{\beta x^3}{6} + \frac{\gamma x^2}{2} - \frac{\delta x}{5} + 2004$

iii) $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$

iv) $f(x) = x \cdot e^x - \frac{x}{e^x}$

v) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x}$

vi) $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x^3 \cdot \ln x, x > 0$

vii) $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + \sqrt{x}, x > 0$

ΘΕΜΑ 10°

α) Αν $h(x) = 3 \sin x + 2 \eta \mu x$ να δείξετε ότι $h''(x) + h(x) = 0$

β) Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = 2x - x^2$, να δείξετε ότι:
 $(1-x) \cdot \varphi''(x) + \varphi'(x) = 0$

γ) Αν $f(x) = e^x \cdot \eta \mu x$ να δείξετε ότι: $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

δ) Αν $g(x) = 5x + 1 + \frac{2}{x}$, να αποδείξετε ότι: για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$ ισχύει
 $x \cdot g'(x) + g(x) = 10x + 1$

ΘΕΜΑ 11°

α) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο κάθε.

$f(3+h) = 2h^5 - 3h + 5$ για κάθε $h \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε την τιμή $f(3)$

ii) Να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(3)$

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2ax + 3$, να βρείτε την τιμή του a ,

ώστε $g'(3) = 4$

γ) Ομοίως να προσδιοριστούν τα a και β ώστε για τη συνάρτηση

$h(t) = at^2 + \beta t - 3$ να ισχύει: $h'(1) = h(-1) = 2$

ΘΕΜΑ 12°

α) Αν $f(x) = -3x^4$ και $f'(a) = 12$, ποια είναι η τιμή του a ;

β) Αν $f(x) = \frac{2}{x}$ και $f'(\beta) = -\frac{1}{18}$, να προσδιοριστεί η τιμή του β .

γ) Αν $f(x) = \eta \mu x + \sin x$ και $f'(\lambda) - f''(\lambda) = 0$, με $0 < \lambda < \pi$, ποια είναι η τιμή του λ ;

ΘΕΜΑ 13°

Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

- i) $f(x)=x^5$ $g(x)=(3x-2)^5$ $h(x)=(ax^2+bx+c)^5$
- ii) $f(x)=e^x$ $g(x)=e^{2x-1}$ $h(x)=e^{2x^2-3x+5}$ $t(x)=e^{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$
- iii) $f(x)=\ln x$ $g(x)=\ln 5x$ $h(x)=\ln(x^2-x+1)$ $t(x)=\ln(e^x+x^2+1)$
- iv) $f(x)=\eta\mu x$ $g(x)=\eta\mu(2x+3)$ $h(x)=\eta\mu(\chi^2-\chi+3)$
- v) $f(x)=x^3$ $g(x)=\sigma\upsilon\nu x^3$ $h(x)=\sigma\upsilon\nu 3x$ $t(x)=\sigma\upsilon\nu^3 \chi$
- vi) $f(x)=e^{-x}$ $g(x)=e^{-x}-e^{1-x}$ $h(x)=\eta\mu^3(\chi^2+1)$

ΘΕΜΑ 14°

Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

- i) $f(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$ $g(x)=e^{\frac{x}{x^2+1}}$ $h(x)=\frac{e^{-x}+e^x}{e^x}$
- ii) $f(x)=\ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$ $g(x)=\ln\frac{1}{e^x+3}$ $h(x)=\eta\mu(x \cdot \ln 3x)$
- iii) $f(x)=x^3 \cdot \eta\mu 2x - (\chi^2+1) \cdot \ln 5x$ $g(x)=\frac{x \ln 2x - x^3}{x^2+1}$
- iv) $f(x)=(\ln x - 3x)^3$ $g(x)=(x^2 - x + 3)e^{3x}$
- v) $f(x)=\frac{1}{3} \ln 3x$ $g(x)=(3x-2)^5 - x \cdot \sqrt{x}$ $t(x)=x^3 \cdot \eta\mu 2x - 7x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 3x$

ΘΕΜΑ 15°

Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν $f(2)=-1$, $g(2)=3$, $f'(2)=5$ και $g'(2)=-7$. Να βρείτε για

$\chi=2$ τις παραγώγους των συναρτήσεων: $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$

ΘΕΜΑ 16°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 2x-1, & x \geq 1 \end{cases}$

- Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $\chi=1$.
- Να βρείτε την παράγωγο της f στο $\chi=1$.

ΘΕΜΑ 17° Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1, & x < 1 \\ 2x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$

- Να προσδιοριστεί η τιμή του πραγματικού αριθμού a , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x=1$.
- Για την τιμή του a που θα βρείτε να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$.

ΘΕΜΑ 18° Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 3$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες είναι:

i) $f''(x)=0$ ii) $f''(x)>0$ iii) $f''(x)<0$

ΘΕΜΑ 19° Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ενός τετραγώνου, ως προς την πλευρά του, τη στιγμή που αυτό είναι 100 m^2 .

ΘΕΜΑ 20° Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας και του όγκου ενός κύβου, ως προς την ακμή του a , όταν η ακμή είναι $a=3 \text{ cm}$.

ΘΕΜΑ 21° Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές κ και $\kappa+1$, $\kappa>0$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής ως προς κ , της περιμέτρου του και του εμβαδού του όταν :

i) $\kappa=1$ ii) $\kappa=2$ iii) $\kappa=3$

ΘΕΜΑ 22° Η θερμοκρασία ενός ασθενούς στη διάρκεια 2 ωρών δίνεται από τον τύπο $\Theta(t) = t - \sqrt{t} + 39$ σε βαθμούς C° , όπου $t \in [0,2]$ είναι ο χρόνος σε ώρες. Όταν $t=1$ τότε :

- A. Ο πυρετός ανεβαίνει με ρυθμό $\frac{1}{2} C^\circ$ την ώρα.
B. Ο πυρετός πέφτει με ρυθμό $\frac{1}{2} C^\circ$ την ώρα.
Γ. Ο πυρετός ανεβαίνει με ρυθμό $1 C^\circ$ την ώρα.
Δ. Ο πυρετός πέφτει με ρυθμό $\frac{1}{4} C^\circ$ την ώρα.
Ε. Ο πυρετός ανεβαίνει με ρυθμό $\frac{1}{4} C^\circ$ την ώρα.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

ΘΕΜΑ 23° Για τη διάσωση ενός είδους αρκούδας από την εξαφάνιση, προτείνεται να ληφθούν μέτρα προστασίας. Μετά την εφαρμογή των μέτρων αυτών εκτιμάται ότι ο αριθμός $N(t)$ των αρκούδων θα μεταβάλλεται ως προς το χρόνο (t σε έτη) σύμφωνα με τη συνάρτηση:

$$N(t) = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 8t + 900, \quad 0 \leq t \leq 12$$

- Να βρείτε τον ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των αρκούδων κατά τον 3^ο και τον 6^ο χρόνο.
- Πόσες αρκούδες θα υπάρχουν το 12^ο χρόνο;

ΘΕΜΑ 24^ο

Η θερμοκρασία ενός ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

$$\Theta(t) = -\frac{2}{25}t(t-10) + 37, \text{ όπου } t \in [0, 10] \text{ είναι ο χρόνος σε ώρες.}$$

Να εξετάσετε αν τη χρονική στιγμή τα $t=7$ ο πυρετός του ασθενούς ανεβαίνει ή πέφτει.

ΘΕΜΑ 25^ο

Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθ. Ομαλή κίνηση δίνεται από τον τύπο $\chi = \chi(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, όπου t sec και χ μέτρα.

- Να βρεθεί η μέση ταχύτητα του σημείου στο διάστημα $[0, 1]$.
- Να βρεθεί η ταχύτητα και ποια η επιτάχυνση του σημείου σε χρόνο 2 sec και σε χρόνο 4 sec.
- Πότε το σημείο είναι ακίνητο;
- Πότε το σημείο κινείται προς τη θετική και πότε προς την αρνητική κατεύθυνση;

ΘΕΜΑ 26^ο

Ένα κινητό σε χρόνο t sec διανύει διάστημα S σε m που δίνεται από τον τύπο:
 $S(t) = t^3 + t^2 + t + 1, 0 \leq t \leq 5$. Να βρείτε :

- Την αρχική ταχύτητα του κινητού.
- Τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του κινητού γίνεται 6 m/sec.
- Τη χρονική στιγμή που η επιτάχυνσή του γίνεται 26 m/sec².

ΘΕΜΑ 27^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = x^2 - 4x + 4$

- Να υπολογίσετε την παράγωγο της f
- Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f
- Να βρείτε το σημείο στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και να υπολογίσετε το ακρότατο αυτό.

ΘΕΜΑ 28^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα σημεία στα οποία παρουσιάζει ακρότατα. Ποια είναι τα ακρότατα αυτά;

ΘΕΜΑ 29°

Για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις :

$$\phi(x) = 2x^2 - 4x - 1, \quad \sigma(x) = 4x - x^2 + 2$$

$$f(x) = x^3 - 3x, \quad g(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$$

$$h(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1, \quad \psi(x) = x^2 \cdot e^x$$

$$t(x) = (2x - x^2) \cdot e^x, \quad k(x) = x + \frac{25}{x}$$

- α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο τις ρίζες της και το πρόσημό της.
β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης.
γ) Να προσδιορίσετε τις θέσεις ακρότατων (αν υπάρχουν) και
δ) Να βρείτε τις τιμές των ακρότατων.

ΘΕΜΑ 30°

Ομοίως για τις συναρτήσεις :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{3}{4}, \quad g(x) = -x^3 + 12x + 13$$

$$\phi(x) = (2 - x)^2, \quad \sigma(x) = x(x - 1)^2$$

$$t(x) = x \cdot \ln x, \quad k(x) = \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1), \quad x > 0$$

ΘΕΜΑ 31°

Να δείξετε ότι δεν έχουν ακρότατα οι συναρτήσεις:

$$f(x) = -x^3 - 6x + 7, \quad g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 16,$$

$$h(x) = -x^3 + 1$$

ΘΕΜΑ 32°

Αν η συνάρτηση $\varphi(x) = ax^2 - 4x + 3$ παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x=1$,

- Να προσδιοριστεί ο a .
- Στη συνέχεια να βρεθεί το ακρότατο και το είδος του ακροτάτου.

ΘΕΜΑ 33°

Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx - 1$ έχει ακρότατο το $\psi=2$ στη θέση $x=1$.

- Να βρεθούν οι a και b
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος του ακροτάτου.

ΘΕΜΑ 34°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=kx^3+lx^2+3x-1$.

- Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.
- Να προσδιορίσετε τα k και l , ώστε η f να έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x=2$ και $x=-2$.
- Να βρείτε τις τιμές και το είδος των ακροτάτων.

ΘΕΜΑ 35°

Το συνολικό κόστος για την παραγωγή x , $x>10$ μονάδων ενός προϊόντος είναι $K(x)=4x^2-200x+6400$. Να βρείτε πόσα προϊόντα πρέπει να παραχθούν ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος του προϊόντος.

ΘΕΜΑ 36°

Ο πληθυσμός μιας χώρας για χρονική περίοδο 60 ετών, $t \in [0, 60]$ έτη, από τη συνάρτηση : $\Pi(t) = -\frac{1}{200}t^2 + \frac{2}{5}t + 50$ (εκατομμύρια).

- Αν η χρονική στιγμή $t=0$ αντιστοιχεί στο έτος 1940, να βρείτε τη μέγιστη τιμή του πληθυσμού.
- Ποιο έτος προκύπτει αυτή η τιμή;

ΘΕΜΑ 37°

Μια καθημερινή τηλεοπτική εκπομπή προβλήθηκε για πρώτη φορά όταν $t=0$. Η θεαματικότητα της, σε συνάρτηση με το χρόνο t , δίνεται από τη συνάρτηση :

$$\Theta(t) = \frac{1}{10}t(20-t) + 2 \quad (\%), \text{ όπου } t \in [0, 15] \text{ είναι ο χρόνος σε μήνες.}$$

- Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η θεαματικότητα της εκπομπής ήταν μέγιστη.
- Ποια ήταν αυτή η θεαματικότητα;

ΘΕΜΑ 38°

Σωλήνας διατομής $x \text{ cm}^2$, τροφοδοτεί με νερό απομακρυσμένο χωριό. Το κόστος σε ευρώ ανά km σωλήνα δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = \frac{1200}{x} + 4800x$.

- Να βρεθεί η διατομή του σωλήνα για την οποία το κόστος είναι ελάχιστο.
- Ποια είναι η ελάχιστη τιμή κόστους ανά km.

ΘΕΜΑ 39°

Το κόστος για την παραγωγή x ($x \geq 100$) αυτοκινήτων μιας αυτοκινητοβιομηχανίας είναι $k(x) = 30 + 3x + \frac{1}{100}x^2$ (σε χιλιάδες ευρώ).

Αν κάθε αυτοκίνητο πωλείται προς 11.000 ευρώ, να βρείτε πόσα αυτοκίνητα πρέπει να παραχθούν ώστε τα κέρδη να μεγιστοποιηθούν.

ΘΕΜΑ 40°

Μια βιομηχανία παράγει ηλεκτρ. ξυριστικές μηχανές. Το κόστος $K(x)$, σε ευρώ, για την παραγωγή x ηλεκτρ. μηχανών σε μια ημέρα δίνεται από τον τύπο

$$K(x) = 200 + 40x - \frac{x^2}{4}, \quad x \in [0, 50].$$

- A. Να βρείτε τον αριθμό $K'(10)$
B. Να βρείτε το κόστος παραγωγής της 11^{ης} ηλεκτρ. ξυριστ. μηχανής.
Γ. Αν οι εισπράξεις της βιομηχανίας, σε ευρώ από την πώληση x ηλεκτρ. ξυρ.

μηχανών δίνονται από τη σχέση $E(x) = 50x + \frac{x^2}{2}$, να βρείτε:

- i) Τον αριθμό $E'(10)$
ii) Τον αριθμό $P'(10)$, όπου $P(x)$ είναι το καθαρό κέρδος από την πώληση x ξυριστικών μηχανών.

ΘΕΜΑ 41°

Το κόστος ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι σε συνάρτηση με το χρόνο κατασκευής του, $K(t) = t^2 + 250t$.

- Αν η τιμή πώλησης είναι 1000 ευρώ, να βρείτε πότε πραγματοποιήθηκε το μέγιστο κέρδος.
- Ποιο είναι το κέρδος αυτό;

ΘΕΜΑ 42°

Το συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = 50 + 2x + 0,5x^2$ και τα συνολικά έσοδα δίνονται από τη συνάρτηση $E(x) = 20x - x^2$.

Να βρεθεί η τιμή του x για την οποία το κέρδος $f(x)$ είναι μέγιστο.

ΘΕΜΑ 43°

Το συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = 10 + 28x - 5x^2 + \frac{x^3}{3}$, ενώ τα έσοδα, ανά μονάδα προϊόντος δίνονται από τη συνάρτηση $e(x) = 2750 - 5x$ ευρώ.

Αν για κάθε μονάδα του προϊόντος επιβάλλεται φόρος 222 ευρώ, ο οποίος προστίθεται στο κόστος, να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής ώστε το κέρδος να είναι μέγιστο.

ΘΕΜΑ 44^ο: Να συμπληρώσετε σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) στην κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

Αν $f(x) = \eta \mu^2 x$ τότε $f'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

Αν $f(x) = \frac{2}{x}$ και $f'(a) = -\frac{2}{25}$ τότε το a μπορεί να είναι -5

Αν $f(x) = \frac{x}{e^x}$ τότε $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$

Αν $f(x) = \ln \frac{1}{x}$ τότε $f''(x) = x^2$

ΘΕΜΑ 45^ο: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{e^x}, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι έχει μέγιστη τιμή την οποία να προσδιορίσετε.

ΘΕΜΑ 46^ο:

Ερευνητής χορήγησε φάρμακο σε πύθηκο που στο τρίχωμά του αναπτύσσονται αποικίες βακτηρίων. Η επίδραση του φαρμάκου στον πληθυσμό $f(t)$ των βακτηρίων

$$f(t) = k(e^{10-t^2} - e)$$

με την πάροδο του χρόνου δίνεται από τον τύπο: , όπου $t \geq 0$ (σε ώρες) και k θετική σταθερά.

A. Να αποδειχθεί ότι ο παραπάνω πληθυσμός συνεχώς ελαττώνεται.

B. Σε πόσες ώρες οι αποικίες θα έχουν εξαφανισθεί από το τρίχωμα του πύθηκου;

Γ. Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μείωσης του πληθυσμού είναι ελάχιστος.

ΘΕΜΑ 47^ο Να αντιστοιχίσετε τα γράμματα της στήλης A με τους αριθμούς της στήλης B που αντιστοιχούν στη σωστή παράγουσα.

Στήλη A Συνάρτηση $f(x)$	Στήλη B Παράγουσα $F(x), c \in \mathbb{R}^*$
α. $f(x) = \eta \mu x$	1. $F(x) = e^x + \ln x - \frac{x^2}{2} + c$

β.	$f(x) = e^x$	2.	$F(x) = \sin x + c$
γ.	$f(x) = 3x^2 + 2x - 3$	3.	$F(x) = \frac{\eta \mu x}{e^x} + c$
δ.	$f(x) = e^x + \frac{1}{x} - 3x + 1$	4.	$F(x) = x \cdot e^x + c$
ε.	$f(x) = x^{2002} - \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\eta \mu^2 x}$	5.	$F(x) = x^3 + x^2 - 3x + c$
ζ.	$f(x) = \frac{e^x \sin x - e^x \eta \mu x}{e^{2x}}$	6.	$F(x) = \frac{1}{2003} x^{2003} - \varepsilon \varphi x - \sigma \varphi x + c$
η.	$f(x) = e^x + x \cdot e^x$	7.	$F(x) = \frac{\ln x}{x} + c$
θ.	$f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$	8.	$F(x) = e^x + c$
ι.	$f(x) = \frac{1}{x^2}$	9.	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$

ΘΕΜΑ 48^ο: Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- i) $f'(x) = 2x + 1$ και $f(1) = 2$
- ii) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 3$ και $f(1) = 0$
- iii) $f'(x) = \frac{3}{x} - 4x + 2$ και $f(1) = 1$
- iv) $f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$ και $f(1) = e$
- v) $f''(x) = 2$ και $f'(1) = 2$ και $f(-1) = 3$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΔΙΚΩΝ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
Β' ΚΥΚΛΟΥ Τ.Ε.Ε

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ
ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνεται ο πίνακας συχνοτήτων

x_i	Συχνότητα (v_i)	$v_i \cdot x_i$	Σχετική Συχνότητα (f_i)	Σχετική Συχνότητα % ($f_i \%$)
1	12			
2	15			
3	8			
4	5			
5	10			
Αθροίσμα				

- α. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.
 Μονάδες 19
- β. Να βρείτε τη μέση τιμή.
 Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 2$$

- α. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .
 Μονάδες 5
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 Μονάδες 10
- γ. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.
 Μονάδες 5
- δ. Να υπολογίσετε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .
 Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}, & x > 3 \\ \lambda^2 x^2 + 3\lambda x + 1, & x \leq 3 \end{cases}$$

όπου λ πραγματικός αριθμός. Να βρείτε:

α. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

Μονάδες 8

β. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

Μονάδες 12

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ
ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ
ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001

ΘΕΜΑ 2ο

Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x$.

Μονάδες 5

β. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$.

Μονάδες 8

γ. $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

α. Να την εξετάσετε ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 12

β. Να βρείτε σε ποιο σημείο η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και να το υπολογίσετε.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Εξετάσαμε 20 οικογένειες ως προς τον αριθμό των παιδιών που έχουν. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός παιδιών (x_i)	Οικογένειες (v_i)
0	3
1	5
2	8
3	3
4	1
ΣΥΝΟΛΟ	20

α. Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τη μέση τιμή.

Μονάδες 10

γ. Να κατασκευάσετε τον πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων και να βρείτε πόσες οικογένειες έχουν λιγότερα από τρία παιδιά.

Μονάδες 10

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ
ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002

ΘΕΜΑ 1°

Οι βαθμοί των 11 μαθητών μιας τάξης ενός Τ.Ε.Ε. σε ένα μάθημα είναι:

12, 12, 9, 15, 12, 16, 17, 7, 19, 18, 17.

Για τα δεδομένα αυτά:

- | | | |
|----|---|-----------|
| α. | Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων. | Μονάδες 5 |
| β. | Να βρείτε τη μέση τιμή. | Μονάδες 5 |
| γ. | Να βρείτε την επικρατούσα τιμή. | Μονάδες 5 |
| δ. | Να βρείτε τη διάμεσο. | Μονάδες 5 |
| ε. | Να βρείτε τη διακύμανση. | Μονάδες 5 |

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \ln 2.$$

- | | | |
|----|--|------------|
| α. | Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f . | Μονάδες 8 |
| β. | Να βρείτε τις τιμές $f'(0)$ και $f'(1)$. | Μονάδες 5 |
| γ. | Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. | Μονάδες 12 |

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^2 - 1, & x \geq 1 \\ x + 2, & x < 1 \end{cases}$$

όπου λ πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ Μονάδες 10

β. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε το λ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

ξ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

με $f(x) = \lambda x^3 - x$ όπου λ πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

$$x \rightarrow 1$$

α. Να βρείτε την τιμή του λ . Μονάδες 10

β. Για την τιμή του λ που βρήκατε, να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) dx$.

Μονάδες 7

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ
ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ
ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = 2x^3 + 5$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = x^2 + 1$$

α. Να βρείτε την $f'(x)$ και την $g'(x)$

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την $[f(x) \cdot g(x)]'$

Μονάδες 10

γ. Να βρείτε την $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]'$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -4(x^2 + 1) + 16x - 9$

α. Να εξετάσετε τη συνάρτηση ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 12

β. Να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Ρωτήσαμε 50 εργαζόμενους μιας εταιρείας ως προς τις μηνιαίες αποδοχές τους. Τα αποτελέσματα φαίνονται στις δύο πρώτες στήλες του παρακάτω πίνακα:

Αποδοχές σε Ευρώ (x_i)	Αριθμός εργαζομένων n (v_i)	Αθροιστική συχνότητα	Σχετική Συχνότητα (f_i)	Σχετική αθροιστική συχνότητα	$v_i x_i$
800	6				
900	17				
1000	12				
1100	8				
1200	7				
Αθροίσματα	50				

α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τις κενές στήλες.

Μονάδες 15

β. Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τη μέση τιμή.

Μονάδες 5

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ
ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2003

ΘΕΜΑ 1ο

Μια μεταβλητή παίρνει τις τιμές :

$$5, 3, 3\omega, 3, 2\omega, 3, 3\omega, \omega \quad \text{με } \omega > 0$$

α) Αν η μέση τιμή τους είναι $\bar{X} = 4$, να αποδείξετε ότι $\omega = 2$. Μονάδες 7

β) Για $\omega = 2$ να βρείτε :

i) Το εύρος των τιμών.

Μονάδες 5

ii) Την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 5

iii) Την τυπική απόκλιση.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1}, & \alpha \nu \ x \neq 1 \\ \lambda - 2, & \alpha \nu \ x = 1 \end{cases}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(0)$ και το $f(2)$.

Μονάδες 6

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1}$.

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$ με $x > 0$

α) Να βρείτε το $f(1)$.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε την $f'(x)$ και την $f''(x)$.

Μονάδες 14

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Το ύψος (σε m) που βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου, μετά από χρόνο πτήσης t (sec) δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -3t^2 + 30t, \text{ όπου } 0 \leq t \leq 10$$

α) Σε ποιο ύψος βρίσκεται το αεροπλάνο τη χρονική στιγμή $t=0$;

Μονάδες 5

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου μετά από χρόνο t .

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το αεροπλάνο ανεβαίνει, καθώς και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κατεβαίνει.

Μονάδες 7

δ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή t κατά την οποία το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος, καθώς και το ύψος αυτό.

Μονάδες 6

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 09 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1^ο

Εξετάσαμε δείγμα 25 οικογενειών μιας πόλης, ως προς τον αριθμό των παιδιών τους. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός παιδιών	Συχνότητα	Αθροιστική Συχνότητα	Σχ. Συχνότητα (%)
X_i	V_i		$f_i \%$
0	4		
1			
2	5		
3	4		
4	3		
5	2		
Αθροίσματα			

α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε. **Μονάδες 5**

β) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή. **Μονάδες 5**

γ) Να βρείτε τη διάμεσο. **Μονάδες 5**

δ) Τι ποσοστό οικογενειών έχει τρία παιδιά; **Μονάδες 5**

ε) Πόσες οικογένειες έχουν μέχρι και δύο παιδιά; **Μονάδες 5**

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-18}{\sqrt{x}-3} & , \quad x > 9 \\ \lambda x + 3 & , \quad x \leq 9 \end{cases}$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 9^+} f(x)$ **Μονάδες 12**

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x)$ **Μονάδες 5**

γ) Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=9$. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με
 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f . **Μονάδες 5**

β) Αν $f'(1)=0$ και $f(2)=5$, να βρείτε τα α και β . **Μονάδες 10**

γ) Για τις τιμές των α και β που βρήκατε στο ερώτημα (β), να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 4^ο

Το άθροισμα του μήκους και του πλάτους ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, είναι 200 μέτρα. Αν το μήκος του είναι x μέτρα:

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = -x^2 + 200x.$$

Μονάδες 5

- β) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο;

Μονάδες 10

- γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

Μονάδες 10

ΟΛΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β΄ ΚΥΚΛΟΥ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2005

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Ερωτήθηκαν 50 μαθητές ενός σχολείου για τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν στις διακοπές. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα	$x_i v_i$
0		11	
1		25	
2		42	
3		47	
4		50	
Αθροίσματα			

- α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 8

- β) Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Μονάδες 8

- γ) Να βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων.

Μονάδες 5

- δ) Να βρείτε το εύρος των τιμών.

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \quad x < -1 \\ x - 1 & , \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \kappa x + \mu & , \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 2x + 5 + \ln x & , \quad x > 1 \end{cases}$$

όπου κ, μ πραγματικοί αριθμοί

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ Μονάδες 4

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ Μονάδες 4

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ Μονάδες 4

δ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ Μονάδες 4

ε) Να βρείτε τα κ και μ , ώστε να υπάρχουν ταυτόχρονα
τα $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η πρώτη παράγωγος έχει τύπο: $f'(x) = x^2 - 2x$.

α) Να δείξετε ότι $f'(0) = 0$ και $f'(2) = 0$.

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
Μονάδες 6
- γ) Να βρείτε την $f''(x)$.
Μονάδες 6
- δ) Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει ακρότατα και ποιο είναι το είδος των ακρότατων;
Μονάδες 4
- ε) Αν $f(0) = 2005$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Μια ομάδα βιολόγων προτείνει να ληφθούν μέτρα για τη διάσωση ενός είδους δελφινιών. Μετά την εφαρμογή των μέτρων εκτιμάται ότι ο αριθμός των δελφινιών εκφράζεται από τη συνάρτηση $N(t) = 2t^3 - t^2 + 5t + 1000$, $0 \leq t \leq 10$, όπου t ο χρόνος σε έτη.

- α) Πόσα δελφίνια υπάρχουν κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων ($t = 0$);
Μονάδες 5
- β) Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών.
Μονάδες 8
- γ) Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών το δεύτερο έτος.
Μονάδες 7
- δ) Πόσα δελφίνια θα υπάρχουν σε δέκα (10) έτη;
Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2006

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνονται 5 παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X:

$$16, 14, 22, 18, 20 + \alpha, \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) των παρατηρήσεων αυτών είναι 20% και η τυπική απόκλισή τους (s) είναι 4, τότε:

- α) Να δείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 20$.

Μονάδες 7

- β) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α.

Μονάδες 10

- γ) Για την τιμή του α που υπολογίσατε στο ερώτημα β, να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος.

Μονάδες 5

- δ) Είναι το δείγμα ομοιογενές ή όχι και γιατί.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 4x^3 - 12x + 2006, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- α) Να βρεθεί η παράγουσα της f.

Μονάδες 8

- β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

- γ) Να εξεταστεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 9

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί και συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \cdot \alpha, & \text{αν } x > 2 \\ 4, & \text{αν } x = 2 \\ \alpha x + \beta, & \text{αν } x < 2 \end{cases} .$$

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

Μονάδες 8

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

Μονάδες 5

γ) Να υπολογίσετε τα α, β ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Μονάδες 8

δ) Για τις τιμές των α και β που βρήκατε στο ερώτημα γ, να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$.

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Μια βιοτεχνία, μεταξύ άλλων, κατασκευάζει κεραμικά πλακίδια σε σχήμα τριγώνου. Σε κάθε πλακίδιο το άθροισμα της βάσης x και του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση αυτή είναι σταθερό και ισούται με 50cm.

- α) Να δείξετε ότι το εμβαδό E της επιφάνειας κάθε τριγωνικού πλακιδίου δίνεται συναρτήσει του x από τον τύπο

$$E(x) = \frac{1}{2}x(50 - x), \quad 0 < x < 50.$$

Μονάδες 8

- β) Για ποια τιμή του x το εμβαδό $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 12

- γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του $E(x)$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

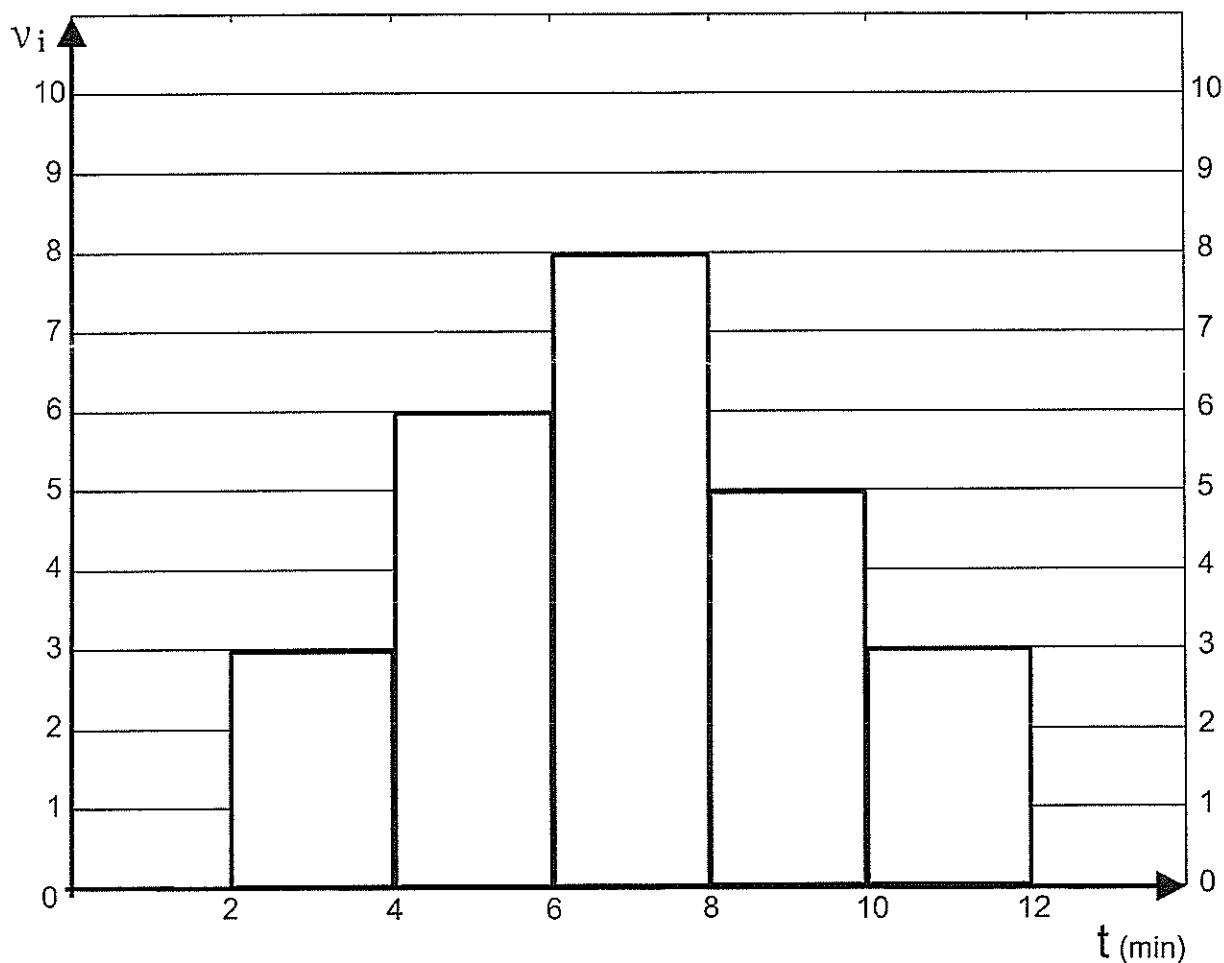
ΤΡΙΤΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2007

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Οι χρόνοι καθυστέρησης που παρατηρήθηκαν σε 25 δρομολόγια ενός οργανισμού σιδηροδρόμων δίνονται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων:



- α. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε με τη βοήθεια του παραπάνω ιστογράμματος συχνοτήτων.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Διάστημα	Συχνότητα ν_i	Μέσο διαστήματος K_i	$\nu_i K_i$	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Σχετική αθροιστική συχνότητα %
[2, 4)					
[4, 6)					
[6, 8)					
[8, 10)					
[10,12)					
Αθροίσματα					

Μονάδες 10

- β. Να βρείτε το μέσο χρόνο καθυστερήσεων των δρομολογίων.

Μονάδες 5

- γ. Πόσα δρομολόγια είχαν καθυστέρηση τουλάχιστον 6 λεπτά;

Μονάδες 5

- δ. Ποιο είναι το ποσοστό των δρομολογίων που είχαν καθυστέρηση λιγότερο από 8 λεπτά;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x}, & \text{αν } x < 0 \\ -3 + \beta & \text{αν } x = 0 \\ e^x - \alpha & \text{αν } x > 0 \end{cases},$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Μονάδες 4

γ. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Μονάδες 8

δ. Για την τιμή $\alpha=4$ να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό β , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x=0$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + kx + \lambda$, $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$ και το σημείο $A(1,0)$ ανήκει στη γραφική της παράσταση,

α. να δείξετε ότι $k=-2$ και $\lambda=1$.

Μονάδες 12

β. να υπολογίσετε τη δεύτερη παράγωγο f'' της f .

Μονάδες 5

γ. να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) + f'(x) + f''(x) > 0.$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 10 \ln x - 5x^2$, $x > 0$.

α. Να βρείτε την παράγωγο f' της f .

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
Μονάδες 8
- γ. Για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει ακρότατο. Να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου και να το υπολογίσετε.
Μονάδες 8
- δ. Να δείξετε ότι $f(x) \leq -5$, για κάθε $x > 0$.
Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β΄ ΚΥΚΛΟΥ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΠΕΜΠΤΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2008

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα ήταν:

8, 14, 20, 12, 16

α. Να υπολογισθεί η μέση βαθμολογία του μαθητή.

Μονάδες 4

β. Να προσδιορισθεί η διάμεσος.

Μονάδες 3

γ. Να υπολογισθεί η τυπική απόκλιση.

Μονάδες 6

δ. Να υπολογισθεί το εύρος.

Μονάδες 3

ε. Να υπολογισθεί ο συντελεστής μεταβλητότητας και στη συνέχεια να εξεταστεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{\lambda(x-1)}, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3x-1}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

όπου $\lambda \neq 0$.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- α. Να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ **Μονάδες 10**
- β. Να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ **Μονάδες 6**
- γ. Να υπολογισθεί η τιμή του λ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στη θέση $x_0=1$. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=e^{\lambda x}$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

- α. Να βρεθούν οι $f'(x)$ και $f''(x)$. **Μονάδες 6**
- β. Να προσδιορισθούν οι τιμές του λ , ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό x να ισχύει:
$$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0$$
 Μονάδες 9
- γ. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία όταν
i) $\lambda = 2$,
ii) $\lambda = -1$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2008$,
όπου $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος f' της f . **Μονάδες 6**

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- β. Να εξεταστεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 12

- γ. Να δειχθεί ότι $f(x) \geq 2008$ για κάθε πραγματικό αριθμό x , όπου $x \in [1, +\infty)$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΜΑΪΟΥ 2009

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται το πλήθος των τηλεφωνικών κλήσεων που πραγματοποίησαν 25 συνδρομητές μιας εταιρείας κινητής τηλεφωνίας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας.

Πλήθος κλήσεων x_i	Πλήθος συνδρομητών v_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα	Αθροιστική σχετική συχνότητα (%)	$x_i \cdot v_i$
2	4				
3	6				
4	5				
5	7				
6	2				
7	1				
Αθροίσματα	25				

- α. Να μεταφέρετε τον πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 8

- β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του πλήθους των κλήσεων.

Μονάδες 6

- γ. Να βρείτε πόσοι συνδρομητές πραγματοποίησαν το πολύ 4 κλήσεις.

Μονάδες 6

- δ. Να βρείτε το ποσοστό των συνδρομητών που πραγματοποίησαν τουλάχιστον 5 κλήσεις.

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 8x + 12}{x - 6} & , \text{ αν } x > 6 \\ 3\lambda - 5 & , \text{ αν } x = 6 \\ e^{x-6}(2x - \mu) & , \text{ αν } x < 6 \end{cases}$$

όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$

Μονάδες 5

γ. Να υπολογίσετε την τιμή του μ έτσι ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$

Μονάδες 6

δ. Για $\mu = 8$ να βρείτε τον αριθμό λ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο $x = 6$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x-2}{e^x}, \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 10

γ. Να αποδείξετε ότι για $x=3$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο ίσο με $\frac{1}{e^3}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + \lambda x - 2 - \lambda$, όπου $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(0, -5)$ και η συνάρτηση f για $x=1$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε:

α. Να βρείτε τις τιμές των k και λ

Μονάδες 13

β. Για $k=2$ και $\lambda=3$,

i. να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 6

ii. να βρείτε την τιμή και το είδος των ακροτάτων της f .

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 18.00.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Α΄)
ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 28 ΜΑΪΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

A) Δίνεται συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) και $x_0 \in A$. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

Μονάδες 7

B) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας (μεταβολής) ενός δείγματος παρατηρήσεων είναι μικρότερη του 10%, τότε ο πληθυσμός του δείγματος θεωρείται ομοιογενής.

Μονάδες 3

β) $(\sin x)' = \eta \mu x$

Μονάδες 3

γ) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (α, β) .

Μονάδες 3

δ) $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\beta - \alpha)$, όπου c σταθερά.

Μονάδες 3

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Γ) Αν οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους A , τότε να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $(f \cdot g)'(x) = \dots\dots\dots$

Μονάδες 2

β) $(c \cdot f)'(x) = \dots\dots\dots$, όπου c σταθερά.

Μονάδες 2

γ) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = \dots\dots\dots$ με $\beta > \alpha > 0$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Ρωτήθηκαν 25 μαθητές μιας τάξης ενός Λυκείου πόσα λογοτεχνικά βιβλία διάβασαν την περσινή χρονιά. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Βιβλία x_i	Μαθητές v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα %	$x_i v_i$
1	4				
2					
3	8				
4	7				
Αθροίσματα					

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- A) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 10

- B) Να υπολογίσετε τη διάμεσο.

Μονάδες 5

- Γ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή.

Μονάδες 5

- Δ) Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που διάβασε τουλάχιστον δύο (2) βιβλία;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -x^2 + 6x + 8$

- A) Να υπολογίσετε την $f'(x)$

Μονάδες 4

- B) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 8

- Γ) Για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο; Να βρείτε το είδος του ακροτάτου.

Μονάδες 6

- Δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^3 f(x) dx$

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + 4x + 2\alpha e^x$,

$$\text{όπου } \alpha = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$$

A) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α .

Μονάδες 5

B) Για $\alpha = 1$

α) Να υπολογίσετε την $f'(x)$

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Μονάδες 5

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=4$, είναι ίσο με $84 + 2e^4 - 2e^2$ τ.μ.

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό διαρκείας ανεξίτηλης μελάνης.**
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α')

ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β')

ΠΕΜΠΤΗ 27 ΜΑΪΟΥ 2010

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΗΜΕΡΗΣΙΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α.

A1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η μέση τιμή δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές της μεταβλητής.

β) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και είναι $\ell \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|.$$

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

δ) Ισχύει ότι: $\int_a^a f(x) dx = a$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 12

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dots\dots\dots$, με $g(x) \neq 0$

β) $(\sqrt{x})' = \dots\dots\dots$, με $x > 0$

γ) $(e^x)' = \dots\dots\dots$

δ) $(\sin x)' = \dots\dots\dots$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β.

Οι ημέρες απουσίας 50 υπαλλήλων μιας εταιρείας από την εργασία τους, τον περασμένο μήνα, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Ημέρες απουσίας x_i	Υπάλληλοι n_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα %	$x_i n_i$
0	8				
1	10				
2					
3	10				
4	5				
5	2				
Αθροίσματα					

B1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 10

B2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της μεταβλητής x .

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

B3. Να υπολογίσετε τη διάμεσο της μεταβλητής x .

Μονάδες 5

B4. Να βρείτε το πλήθος και το ποσοστό των υπαλλήλων που απουσίασαν από 2 έως και 4 ημέρες.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} & , \quad x < 1, \quad x \neq -1 \\ \sqrt{x+3} + \alpha & , \quad x \geq 1, \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Γ1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Μονάδες 7

Γ2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Μονάδες 7

Γ3. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Μονάδες 5

Γ4. Για $\alpha=-3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=3f(0)+2f(6)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, τότε:

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Δ1. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β .

Μονάδες 8

Δ2. Για $\alpha=6$ και $\beta=1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Δ3. Για $\alpha=6$ και $\beta=1$, να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Δ4. Για $\alpha=6$ και $\beta=1$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 f(x)dx$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη επιστημονικά είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε το χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α')

ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β')

ΤΡΙΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΗΜΕΡΗΣΙΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Τι ονομάζεται εύρος μιας μεταβλητής;

Μονάδες 6

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η μέση τιμή (μέσος όρος) υπολογίζεται μόνο σε ποσοτικές μεταβλητές. (Μονάδες 2)

β) Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και είναι $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$
αντίστοιχα, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \ell_1 \cdot \ell_2$

(Μονάδες 2)

γ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g'(x), x \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 2)

δ) Ισχύει ότι $\int_a^b \eta \mu x \, dx = \sigma \nu \beta - \sigma \nu \alpha$ (Μονάδες 2)

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ε) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) . (Μονάδες 2)

Μονάδες 10

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $(\ln x)' = \dots\dots\dots$, με $x > 0$ (Μονάδες 3)

β) $(\eta \mu x)' = \dots\dots\dots$ (Μονάδες 3)

γ) Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \dots\dots\dots$

(Μονάδες 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}, & \text{αν } x < 4 \\ \alpha & \text{αν } x = 4 \\ \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} - 3, & \text{αν } x > 4 \end{cases}$$

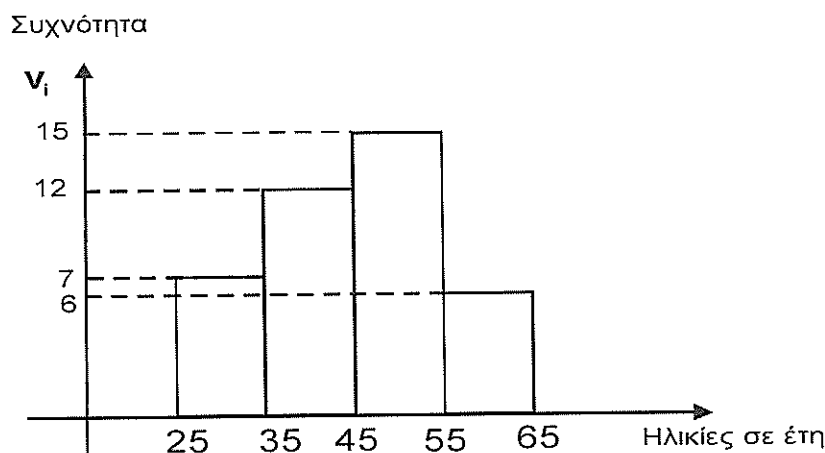
B1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ **Μονάδες 10**

B2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ **Μονάδες 10**

B3. Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 4$. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα, που αφορά τις ηλικίες 40 εργαζομένων σε μια επιχείρηση.



Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα.

Ηλικίες [,)	Μέσο διαστήματος K_i	Συχνότητα v_i		Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
[25,35)					
[35,45)					
[45,55)					
[55,65)					
Σύνολα					

Μονάδες 10

Γ2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων.

Μονάδες 5

Γ3. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία τουλάχιστον 45 ετών;

Μονάδες 5

Γ4. Τί ποσοστό εργαζομένων έχουν ηλικία κάτω των 35 ετών;

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ με $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 6**

Δ2. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f . **Μονάδες 5**

Δ3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_1^3 f'(x) dx$ **Μονάδες 6**

Δ4. Αν $g(x) = 3x^2 - 12x + 9$ με $x \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=3$. **Μονάδες 8**

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη επιστημονικά είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε το χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: **10.30 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α΄)
ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΗΜΕΡΗΣΙΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Τι ονομάζεται διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά;

Μονάδες 6

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . (Μονάδες 2)

β) Το εύρος ως παράμετρος διασποράς εξαρτάται μόνο από τις ακραίες τιμές της μεταβλητής.

(Μονάδες 2)

γ) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[α,β]$. Τότε ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα για το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_a^\gamma f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx = \int_a^\beta f(x)dx, \text{ με } \alpha < \gamma < \beta. \text{ (Μονάδες 2)}$$

δ) Ισχύει ότι: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $x > 0$ (Μονάδες 2)

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ε) Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους f', g' . Τότε ισχύει ότι:
- $$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx \quad (\text{Μονάδες } 2)$$

Μονάδες 10

A3. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες:

α) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = \dots$ με $\beta > \alpha > 0$ (Μονάδες 3)

β) Έστω συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A$ και η g παραγωγίσιμη σε κάθε $f(x) \in B$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει ότι:

$(g \circ f)'(x) = \dots$ (Μονάδες 3)

γ) $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = \dots$ με c σταθερά και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ημερήσιες ώρες διαβάσματος 25 μαθητών μιας τάξης ενός ΕΠΑ.Λ.

Ημερήσιες ώρες διαβάσματος x_i	Μαθητές v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα (%) $f_i\%$	$x_i v_i$
1	6			
2	5			
3	4			
4	κ			
5	$2\kappa+1$			
Σύνολα	$v=25$		100	

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

B1. Να υπολογίσετε τον αριθμό κ

Μονάδες 4

B2. Για $\kappa=3$ να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα.

Μονάδες 8

B3. Για $\kappa=3$ να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και να βρείτε τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων.

Μονάδες 10

B4. Για $\kappa=3$ να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών που διαβάζουν τουλάχιστον 3 ώρες ημερησίως.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}, & \text{αν } x > 1 \\ \alpha x^2 + \beta x, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Μονάδες 5

Γ2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Μονάδες 10

Γ3. Να υπολογίσετε τα α και β , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ1. Να βρείτε την παράγουσα F της f , αν $F(0)=1$.

Μονάδες 5

Δ2. Αν $F(x)=x^3-x^2-x+1$, $x \in \mathbb{R}$ να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της F .

Μονάδες 8

Δ3. Να συγκρίνετε τις τιμές $F(2011)$ και $F(2012)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη επιστημονικά είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε το χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 4 ΜΑΪΟΥ 2010

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Οι ηλικίες έξι παιδιών από μια γειτονιά είναι:

$$2, 6, 6+x, 11, 11, 12+x$$

όπου $x \in \mathbb{R}$.

A1. Αν η μέση τιμή των ηλικιών των παιδιών είναι 9, να αποδείξετε ότι $x=3$.

Μονάδες 5

Για $x=3$,

A2. να βρείτε τη διάμεσο των ηλικιών,

Μονάδες 4

A3. να υπολογίσετε το εύρος των ηλικιών και την επικρατούσα τιμή τους,

Μονάδες 4

A4. να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των ηλικιών και
Μονάδες 8

A5. να εξετάσετε αν το δείγμα των ηλικιών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 4

(Δίνεται $\sqrt{17} \approx 4,12$).

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x + 3x - \lambda, & 0 < x < 1 \\ \mu^2 + 1, & x = 1 \\ \frac{x - x^2}{1 - \sqrt{x}}, & x > 1 \end{cases}$$

όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Μονάδες 5

B2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Μονάδες 10

B3. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Μονάδες 4

B4. Για $\lambda=1$ να βρεθεί για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η f είναι συνεχής στο $x_0=1$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = e^x (x^2 - 3)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

Γ2. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 10

Γ3. Για ποιες τιμές του x η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα; Να προσδιορίσετε το είδος τους και να υπολογίσετε τις τιμές τους.

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f'(x) = x^2 - 3x + \lambda$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Δ1. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός λ .

Μονάδες 10

Για $\lambda = 2$,

- Δ2. να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και το είδος των ακροτάτων,

Μονάδες 7

- Δ3. να συγκριθούν μεταξύ τους οι τιμές της συνάρτησης για $x_1 = \frac{6}{5}$ και $x_2 = \frac{3}{2}$, καθώς επίσης και οι τιμές της συνάρτησης για $x_3 = 4$ και $x_4 = 6$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τις ερωτήσεις να μην τις αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.
3. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
4. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα. Να μη χρησιμοποιηθεί το μιλιμετρέ φύλλο του τετραδίου.
5. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό διαρκείας ανεξίτηλης μελάνης.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 18:00.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ
ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ
ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2003

ΘΕΜΑ 1°

α) Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους :

$$f_1(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 13$$

$$f_2(x) = (x-1) \cdot (x^2 - 3x)$$

$$f_3(x) = x \sin x$$

$$f_4(x) = 2\eta\mu x + e^x$$

Να βρείτε τις πρώτες παραγώγους τους.

Μονάδες 12

β) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης με τύπο: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$, $x \neq 0$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 2°

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$

Μονάδες 12

β) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x^2 - 4x + 1821$

α. Να εξετάσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 13

β. Να εξετάσετε για ποιες τιμές του x , η f έχει ακρότατα.

Μονάδες 6

γ. Για κάθε θέση ακροτάτου x_0 , να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Εξετάσαμε 50 αυτοκίνητα ως προς τον αριθμό των ατόμων που επέβαιναν σε καθένα απ' αυτά. Προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα :

Αριθμός ατόμων x_i	Αριθμός αυτοκινήτων v_i	Αθροιστική συχνότητα	Σχετική συχνότητα f_i	$v_i x_i$
1	8			
2	15			
3	18			
4	5			
5	4			
Αθροίσματα	50			

α. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

Μονάδες 12

β. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{X}$.

Μονάδες

γ. Σε πόσα αυτοκίνητα επέβαιναν μέχρι και τρία άτομα ;

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ

ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 09 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

1) $f_1(x) = x \cdot \ln x, \quad x > 0$

Μονάδες 5

2) $f_2(x) = \frac{x+1}{e^x}$

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

1) $g_1(x) = \eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x$

Μονάδες 8

2) $g_2(x) = 5x^3 - 7x^2 + x + 2004$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 2^ο

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 9x}{x - 3}, \quad x \neq 3$

Μονάδες 10

β) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & , \quad x \leq 1 \\ \lambda x^2 - \lambda^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

1) Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Μονάδες 4

2) Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Μονάδες 4

3) Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^3-12x$

α) Να εξετάσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 13

β) Να εξετάσετε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση έχει ακρότατα.

Μονάδες 6

γ) Για κάθε θέση ακρότατου, να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^ο

Εξετάσαμε δείγμα 50 κατοίκων μιας πόλης, ως προς τον αριθμό των πιστωτικών τους καρτών. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αρ. πιστ. Καρτών x_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα f_i	$x_i \cdot v_i$
0	8			
1	20			
2	11			
3	7			
4	4			
Αθροίσματα	50			

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.
Μονάδες 10
- β) Να βρείτε τη μέση τιμή του δείγματος των 50 κατοίκων.
Μονάδες 5
- γ) Πόσοι κάτοικοι έχουν περισσότερες από δύο κάρτες;
Μονάδες 5
- δ) Να σχεδιάσετε το κατακόρυφο ραβδόγραμμα συχνοτήτων.
Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ

ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2005

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει τις ώρες χρήσης των κινητών τηλεφώνων 50 υπαλλήλων μιας εταιρείας για ένα μήνα:

Ωρες x_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα	Μέσο Διαστήματος K_i	$v_i K_i$
[0 - 2)	5			
[2 - 4)	10			
[4 - 6)	20			
[6 - 8)	10			
[8 - 10)	5			
Αθροίσματα				

- α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 6

- β) Να βρείτε τη μέση τιμή των ωρών χρήσης των κινητών τηλεφώνων.

Μονάδες 6

- γ) Πόσοι υπάλληλοι της εταιρείας χρησιμοποιούν το κινητό τους τηλέφωνο λιγότερο από έξι (6) ώρες το μήνα;

Μονάδες 5

- δ) Να βρείτε τη διακύμανση της παραπάνω κατανομής.

Μονάδες 8

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, & x < 2 \\ 1, & x = 2 \\ x^3 - 3x^2 + 2x + 1, & x > 2 \end{cases}$$

α) Να υπολογιστούν τα: $f(0)$ και $f(3)$

Μονάδες 4

β) Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

Μονάδες 8

γ) Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

Μονάδες 6

δ) Να εξεταστεί αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 + \alpha x + 5$, όπου α πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

β) Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ τοπικό ακρότατο, να αποδείξετε ότι: $\alpha = 2$.

Μονάδες 10

γ) Για $\alpha = 2$, να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 4^ο

Ένα μικρό ναυπηγείο έχει τη δυνατότητα να κατασκευάζει κατ' έτος μέχρι και είκοσι (20) σκάφη ενός συγκεκριμένου τύπου. Το κόστος κατασκευής (σε χιλιάδες €) x σκαφών εκφράζεται με τη συνάρτηση $K(x) = 4x^2 + 30$ και τα έσοδα από τις πωλήσεις τους (σε χιλιάδες €) με τη συνάρτηση $E(x) = 3x^2 + 20x$.

- α) Να βρεθεί το κόστος κατ'ασκευής πέντε (5) σκαφών.

Μονάδες 4

- β) Να βρεθεί ο τύπος $P(x)$ της συνάρτησης του κέρδους του ναυπηγείου.

Μονάδες 7

- γ) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους.

Μονάδες 6

- δ) Πόσα σκάφη πρέπει να κατασκευάζει το ναυπηγείο κατ' έτος για να έχει το μέγιστο κέρδος;

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι
5. : (3) | | |

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ

ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2006

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει τα χρόνια υπηρεσίας ενός δείγματος εργαζομένων σε μία εταιρεία.

Χρόνια υπηρεσίας x	[0 - 10)	[10 - 20)	[20 - 30)	[30 - 40)
Εργαζόμενοι n_i	10	α	20	5

- α) Αν ο μέσος χρόνος υπηρεσίας των εργαζομένων του δείγματος είναι $\bar{x} = 19$ χρόνια, να αποδείξετε ότι $\alpha = 15$.

Μονάδες 9

- β) Για $\alpha = 15$ να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων (n_i), αθροιστικών συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων ($f_i\%$).

Μονάδες 10

- γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των εργαζομένων του δείγματος που έχουν λιγότερα από 30 χρόνια υπηρεσίας.

Μονάδες 3

- δ) Να υπολογίσετε το ποσοστό (%) των εργαζομένων του δείγματος που έχουν τουλάχιστον 20 χρόνια υπηρεσίας.

Μονάδες 3

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \lambda x - 3, & x \leq 1 \\ 2x - \lambda, & x > 1 \end{cases}$$

όπου λ πραγματικός αριθμός.

α) Να υπολογίσετε το: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Μονάδες 5

β) Να υπολογίσετε το: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Μονάδες 5

γ) Να υπολογίσετε την τιμή του λ για την οποία η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 8

δ) Να εξετάσετε αν για $\lambda = 2$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x - 6$.

α) Αν $f(0) = 5$, να υπολογίσετε τον τύπο της αρχικής (παράγουσας) συνάρτησης f .

Μονάδες 5

β) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f που βρήκατε στο ερώτημα α :

(i) ως προς τη μονοτονία

Μονάδες 8

(ii) ως προς τα ακρότατα

Μονάδες 8

γ) Να υπολογίσετε τα: $f''(2)$ και $f''(-3)$.

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα σώμα αφήνεται να πέσει από την κορυφή ενός κτιρίου ύψους 45m, τη χρονική στιγμή $t = 0$ sec. Αν θεωρήσουμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα, το διάστημα που διανύει το σώμα μετά από t sec πτώσης δίνεται από τη συνάρτηση: $S(t) = 5t^2$ (μέτρα m).

- α) Να υπολογίσετε το διάστημα που θα διανύσει το σώμα σε χρόνο $t = 2$ sec.

Μονάδες 4

- β) Να αποδείξετε ότι ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να φτάσει στο έδαφος, είναι $t = 3$ sec.

Μονάδες 7

- γ) Να υπολογίσετε:

- (i) τον τύπο της ταχύτητας $v(t)$ του σώματος κάθε χρονική στιγμή t .

Μονάδες 7

- (ii) την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή της πρόσκρουσης στο έδαφος.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4.

| | | | |
5.

: | (3)
6.

| | | : (1) | |

Κ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ

ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2007

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Εξετάσαμε ένα δείγμα πενήντα (50) μαθητών της Γ' Γυμνασίου ως προς τον αριθμό των ορθογραφικών λαθών που έκαναν σε ένα κείμενο Αρχαίων Ελληνικών. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Λάθη (x_i)	Μαθητές (n_i)	Σχετική Συχνότητα % ($f_i\%$)
2		2ω
5		4ω
6		3ω
8		ω
Αθροίσματα		

α. Να αποδείξετε ότι $\omega=10$.

Μονάδες 7

β. Για $\omega=10$

β1. Να μεταφέρετε τον πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 9

β2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του αριθμού των ορθογραφικών λαθών των μαθητών του δείγματος.

Μονάδες 5

β3. Αν στο παραπάνω δείγμα προστεθούν πενήντα (50) μαθητές με μέση τιμή αριθμού ορθογραφικών λαθών έξι (6), να βρείτε τη νέα μέση τιμή του αριθμού των λαθών στο δείγμα των 100 μαθητών.

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{3-x} + x^2 + kx - 2, & \text{αν } x \leq 3 \\ \frac{2x^2 - 6x}{x-3}, & \text{αν } x > 3, \end{cases}$$

όπου k πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.

Μονάδες 6

γ. Να βρείτε την τιμή του k για την οποία η f είναι συνεχής στο $x_0=3$.

Μονάδες 6

δ. Να βρείτε την τιμή $f''(2)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

Μονάδες 4

β. Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

γ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 6

δ. Να δείξετε ότι $f(0) \cdot f(3) - f'(2) = 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Σε μια άδεια δεξαμενή σχήματος κύβου ακμής 2 m προσθέτουμε πετρέλαιο. Αν το ύψος h (σε m) της στάθμης του πετρελαίου, ως συνάρτηση του χρόνου t (σε min), είναι

$$h(t) = \frac{t^2}{18},$$

α. να βρείτε το ύψος της στάθμης σε χρόνο $t=3$ min.

Μονάδες 5

β. να δείξετε ότι ο όγκος του πετρελαίου της δεξαμενής μετά από χρόνο t min δίνεται από τον τύπο $V(t) = \frac{2t^2}{9} \text{ m}^3$.

Μονάδες 7

γ. να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου του πετρελαίου τη χρονική στιγμή $t=5$ min.

Μονάδες 7

δ. να βρείτε σε πόσο χρόνο θα γεμίσει η δεξαμενή.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνεται ο πίνακας

x_i	v_i
1	5
2	10
3	20
4	$2a$
5	5
Αθροίσματα	

με τις τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής X και τις αντίστοιχες συχνότητες.

α. Να υπολογίσετε το φυσικό αριθμό a εάν ισχύει ότι η μέση τιμή είναι 3.

Μονάδες 15

β. Για $a = 5$ να υπολογίσετε:

i) Τη διάμεσο

Μονάδες 5

ii) Την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x \cdot e^x$

α. Να βρείτε:

i) την πρώτη παράγωγο της f

Μονάδες 4

ii) τη δεύτερη παράγωγο της f .

Μονάδες 4

- β. Να δείξετε ότι ισχύει
 $f''(x) - f'(x) = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

- γ. Να υπολογίσετε το
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f''(x) + f'(x)}{x - 1}.$$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x} - 1}, & 0 < x < 1 \\ -a^2 + 5a, & x = 1 \\ 2e^{x-1} + 2, & x > 1 \end{cases}$$

όπου a πραγματικός αριθμός.

- α. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

Μονάδες 10

- β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Μονάδες 4

- γ. Να υπολογίσετε τις τιμές του a για τις οποίες η f είναι συνεχής στο $x_1 = 1$.

Μονάδες 6

- δ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στο $x_2 = 2$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + a + 2008$, όπου a πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 3

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

γ. Να δείξετε ότι η f έχει ένα τοπικό ελάχιστο, το οποίο να υπολογίσετε συναρτήσει του a .

Μονάδες 8

δ. Να υπολογίσετε το a αν το τοπικό ελάχιστο είναι ίσο με 2009.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 4 ΜΑΪΟΥ 2010

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Οι βαθμοί έξι φοιτητών σε ένα μάθημα είναι:

5, 3, 7, 2, 5, 8

Για τα δεδομένα αυτά να υπολογίσετε:

A1. Το εύρος

Μονάδες 3

A2. Τη μέση τιμή

Μονάδες 5

A3. Τη διάμεσο

Μονάδες 5

A4. Την επικρατούσα τιμή

Μονάδες 5

A5. Τη διακύμανση S^2

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2 - x} \quad \text{με } x \neq 2$$

και

$$g(x) = 6 - \sqrt{x+2} \quad \text{με } x \geq -2$$

Να υπολογίσετε:

B1. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Μονάδες 7

B2. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Εάν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -4$ και $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$, να αποδείξετε ότι

B3. $\lim_{x \rightarrow 2} (g(x) + 8x) = 20$ και

Μονάδες 6

B4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 8, & x \leq 4 \\ \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}, & x > 4 \end{cases}$$

Γ1. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(4)$ και $f(16)$

Μονάδες 6

Γ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$

Μονάδες 3

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$

Μονάδες 5

Γ4. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_1 = 4$

Μονάδες 6

Γ5. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στο $x_2 = 0$, ισούται με 3.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \alpha + \frac{1}{3}, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της f

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + f''(x)}{x + 1}$

Μονάδες 4

Δ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να προσδιορίσετε τις τιμές του x , για τις οποίες η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 10

Δ4. Εάν το τοπικό μέγιστο της f είναι τριπλάσιο από το τοπικό της ελάχιστο, να βρείτε τον αριθμό α .

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα. Να μη χρησιμοποιηθεί το μιλιμετρέ φύλλο του τετραδίου.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό διαρκείας ανεξίτηλης μελάνης.**
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις **18.00**.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Α΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α΄)

ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΤΡΙΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΕΣΠΕΡΙΝΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα τιμής x_i μιας μεταβλητής;

(Μονάδες 4)

β) Έστω $v_1, v_2, \dots, v_k$ οι συχνότητες των τιμών μιας μεταβλητής ενός δείγματος μεγέθους n και $f_1, f_2, \dots, f_k$ οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

i) $v_1 + v_2 + \dots + v_k =$

(Μονάδες 2)

ii) $f_1 + f_2 + \dots + f_k =$

(Μονάδες 2)

Μονάδες 8

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Εύρος τιμών μιας μεταβλητής είναι η διαφορά της μικρότερης τιμής από τη μεγαλύτερη.

(Μονάδες 2)

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Α΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

β) Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$ όπου

$$\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}, \text{ τότε: } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2$$

(Μονάδες 2)

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 2)

δ) Ισχύει ότι $\int_a^b e^x dx = e^a - e^b$

(Μονάδες 2)

Μονάδες 8

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $(x^a)' = \dots$ με $a \in \mathbb{R}^*, x > 0$

(Μονάδες 3)

β) $(\varepsilon\phi x)' = \dots$ με $x \in \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

(Μονάδες 3)

γ) $\int_a^b \eta \mu x dx = \dots$

(Μονάδες 3)

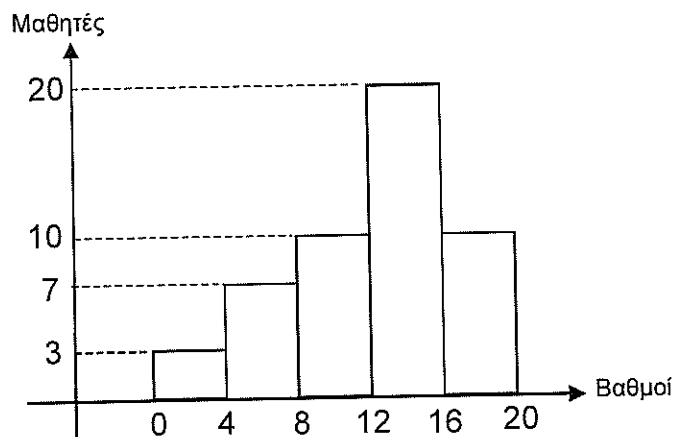
Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Οι βαθμοί στο μάθημα των Μαθηματικών 50 μαθητών σε ένα διαγώνισμα έχουν ομαδοποιηθεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους: $[0,4), [4,8), \dots, [16,20)$. Η συχνότητα των κλάσεων αυτών φαίνεται στο παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων:

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ



B1. Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό ($f_i\%$).

Μονάδες 10

B2. Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των μαθητών.

Μονάδες 5

B3. Τι ποσοστό μαθητών έχει βαθμό τουλάχιστον 12;

Μονάδες 5

B4. Να μεταφέρετε το ιστόγραμμα στο τετράδιό σας και να δείξετε γραφικά ότι η επικρατούσα τιμή είναι ίση με 14.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, όπου $x > 1$

Γ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$

Μονάδες 9

Γ2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_2^3 \frac{-2}{(x-1)^2} dx$$

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

- Γ3.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$. Κατόπιν να συγκρίνετε τις τιμές $f(2010)$ και $f(2011)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^2 + \alpha x + 5, \quad \text{όπου } \alpha = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

- Δ1.** Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α .
Μονάδες 6
- Δ2.** Αν $\alpha = -4$, να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
Μονάδες 8
- Δ3.** Αν $\alpha = -4$, να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Μονάδες 5
- Δ4.** Αν $\alpha = -4$, να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$.
Μονάδες 6

**ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ΄
ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΪΟΣ 2003

ΘΕΜΑ 1ο

- Β. Πότε μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα;
Μονάδες 6
- Γ. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων.
Μονάδες 6
- Δ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- Το εύρος είναι μέτρο θέσης.
 - Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.
 - Ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
όπου f, g παραγωγίσιμες συνάρτησεις.
 - Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση των ποσοτικών μεταβλητών.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

- Α. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:
α. $\mathbb{R}$ β. $(-1, 1)$ γ. $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ δ. $(1, +\infty)$ Μονάδες 5
- Β. Να αποδείξετε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.
Μονάδες 7
- Γ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \cdot f(x)]$ Μονάδες 6
- Δ. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$ με τον άξονα $x'x$. Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα Α) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα Β) ενός Γυμνασίου.

Ομάδα Α	Ομάδα Β
1	7
8	14
9	6
5	4
3	12
4	5

- α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας.
Μονάδες 6
- β. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες.
Μονάδες 5
- γ. Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας Α γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξηθούν κατά 5 Ευρώ η κάθε μία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων;
Μονάδες 8
- δ. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα.
Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2003**ΘΕΜΑ 1ο**

- Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το :

α. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(h)}{h}$, $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ και το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός

β. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}, h \in \mathbb{R}, h \neq 0$

γ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ και το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός

δ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(h)}{h}, h \in \mathbb{R}, h \neq 0.$ Μονάδες 5

Γ. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μέτρο θέσης ενός συνόλου δεδομένων είναι :

α. το εύρος

β. η διάμεσος

γ. η διακύμανση

δ. η τυπική απόκλιση.

Μονάδες 5

Δ. Να ορίσετε το συντελεστή μεταβολής ενός συνόλου παρατηρήσεων. Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f , όταν $x=3$, ισούται με

$$\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Μονάδες 10

γ. Αν $h(x) = \frac{f(x) - \sqrt{3}}{x - 2}$ για $x \neq 2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$. Μονάδες 10

Θέμα 1ο

Α. Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$

α. Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα n_i , που αντιστοιχεί στην τιμή

$$x_i, i=1, 2, \dots, k,$$

Μονάδες 3

β. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής $x_i, i=1, 2, \dots, k$;

Μονάδες 3

γ. Να αποδείξετε ότι :

i) $0 \leq f_i \leq 1$ για $i=1, 2, \dots, k$

ii) $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$

Μονάδες 4

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 4

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} f'(x)$

Μονάδες 4

γ. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f .

Μονάδες 7

δ. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y=2x+5$.

Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στους παρακάτω τιμές, σε Ευρώ:

8, 10, 13, 13, 15, 16, 18, 14, 14, 9.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 6

β. Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής. Μονάδες 6

γ. Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10%, να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής. Μονάδες 13

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2002

ΘΕΜΑ 1ο

A1. Πότε μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής:

Μονάδες 4

A2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και πότε γνησίως φθίνουσα; Μονάδες 4

B1. Σε μια κατανομή συχνοτήτων οι τιμές της μεταβλητής είναι $x_1, x_2, \dots, x_k$ με συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$ αντίστοιχα και n είναι το πλήθος των παρατηρήσεων.

Πώς ορίζεται η μέση τιμή $\bar{X}$;

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

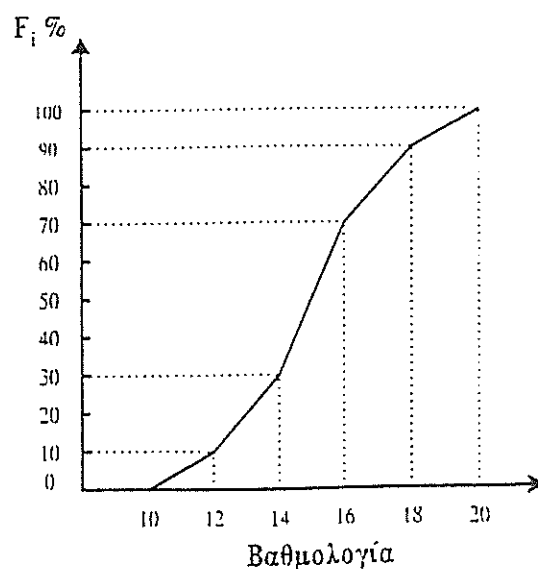
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax(2-x)$, $a \in \mathbb{R}$

Για $a = 1/2$, να βρείτε: τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, που παρουσιάζει τη βαθμολογία μίας ομάδας μαθητών στο μάθημα της Ιστορίας. Η βαθμολογία κυμαίνεται από 10 μέχρι 20. Δίνεται ότι 10 μαθητές έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 και μικρότερο του 14.



α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των μαθητών είναι 50.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τη διάμεσο.

Μονάδες 5

γ. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

Μονάδες 7

ΙΟΥΝΙΟΣ 2001

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin x + \eta \mu x$.

A. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0$.

Μονάδες 8

B. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$.

Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε την τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\lambda f' \left(\frac{\pi}{2} \right) - 2f \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2.$$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ' τάξης ενός Λυκείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

Βάρος σε κιλά [-)	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i
45-55	0,2
55-65	0,5
65-75	
75-85	

A. Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της

αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη κλάση. Μονάδες 8

B. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων. Μονάδες 9

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2001

ΘΕΜΑ 1ο

A.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)$

β. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

γ. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}, (g(x) \neq 0)$

δ. $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}, p \text{ ρητός}, x > 0$

ε. $(\eta \mu x)' = \sigma \upsilon \nu x$

στ. $(\sigma \upsilon \nu x)' = \eta \mu x$ Μονάδες 6

B.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης A και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης B, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη A Συνάρτηση f	Στήλη B Πρώτη παράγωγος της f
α. $2\sqrt{x} + \ln 2, x > 0$	1. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}$
β. $\frac{\eta \mu x}{x}, x \neq 0$	2. $3\sigma \upsilon \nu 3x$

γ. $\eta\mu 3x$	3. $\frac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$
	4. $\frac{1}{\sqrt{x}}$
	5. $\frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$
	6. $-3\sigma\upsilon\nu 3x$

Μονάδες 7,5

B.2. Αν $f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^4$ και $f'(a) = 27$, όπου a πραγματικός αριθμός,

τότε να βρείτε την τιμή του a .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι θερμοκρασίες των 20 πρώτων ημερών του Μαΐου σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$).

A. Αν γνωρίζουμε ότι η μέση θερμοκρασία των παραπάνω ημερών είναι $24,4^{\circ}\text{C}$, τότε:

α. να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία 24°C και πόσες 25°C

Τιμές Θερμοκρασίας x_i	Πλήθος Ημερών ν_i
22	2
23	4
24	
25	
26	2
27	3

Μονάδες 10

β. να υπολογίσετε την επικρατούσα τιμή και τη διάμεσο.

Μονάδες 5

B. Αν γνωρίζουμε ότι η διάμεσος είναι $24,5^{\circ}\text{C}$, να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία 24°C και πόσες 25°C .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Το βάρος των αποσκευών καθενός εκ των 80 επιβατών μιας πτήσης κάποιας Αεροπορικής Εταιρείας είναι τουλάχιστον 11 κιλά αλλά μικρότερο από 26 κιλά. Γνωρίζουμε ότι 8 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 14 κιλά, το 30% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος μικρότερο από 17 κιλά, 48 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 20 κιλά και 15% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος τουλάχιστον 23 κιλά.

- α. Να παρασταθούν τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων. Μονάδες 10
- β. Κάθε επιβάτης δικαιούται να μεταφέρει αποσκευές με βάρος μικρότερο των 20 κιλών, διαφορετικά έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση. Να βρείτε τι ποσοστό από τους 80 επιβάτες της πτήσης αυτής έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση. Μονάδες 7
- γ. Να βρεθούν οι γωνίες των αντιστοίχων κυκλικών τομέων του κυκλικού διαγράμματος σχετικών συχνοτήτων, για τα δεδομένα του προβλήματος. Μονάδες 8

ΙΟΥΝΙΟΣ 2000

ΘΕΜΑ 1ο

- β) Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$cf(x), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad \mu\epsilon \quad g(x) \neq 0,$$

όπου c πραγματική σταθερά.

Μονάδες 4,5

- Β. α) Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α συνάρτηση	Στήλη Β πρώτη παράγωγος
α. x^2+3	1. $1-\eta\mu x$
β. $x+\sigma\upsilon\nu x$	2. $3x^2-8x$
γ. $x\eta\mu x$	3. $2x+3$
δ. x^3-4x^2	4. $\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$
	5. $2x$
	6. $3x^2-4x$
	7. $\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$

Μονάδες 8

- β) Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{e^x}{x}, \quad x \neq 0 \quad \text{είναι:}$$

A: e^x , B: $\frac{e^x - xe^x}{x^2}$, Γ: $\frac{e^x x + e^x}{x^2}$,

Δ: $\frac{e^x x - e^x}{x^2}$, Ε: $\frac{xe^x - e^x}{x}$

Μονάδες 4,5

ΘΕΜΑ 2ο

- A. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον πίνακα των τιμών της μεταβλητής X σωστά συμπληρωμένο.

Τιμές x_i	Συχνότητα V_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$x_i V_i$
1	10				10
2				35	
3					
ΣΥΝΟΛΟ	$v=50$	1	100		

Μονάδες 16

- B. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

Μονάδες 4

- Γ. Να δείξετε ότι η διακύμανση είναι $s^2=0,49$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Στα σχολεία ενός Δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνια υπηρεσίας [-)	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
0- 5	10
5-10	15

10-15	12
15-20	15
20-25	18
25-30	18
30-35	12

A. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας;

Μονάδες 5

B. Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια:

α) πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

β) πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του Δήμου να παραμένει ο ίδιος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2000

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε την $f'(x)$. Μονάδες 5

β. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης f στα οποία η παράγωγος είναι 0. Μονάδες 10

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f . Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται το μορφωτικό επίπεδο των 400 εργαζομένων μιας επιχείρησης σε τέσσερις κατηγορίες.

A' Κατηγορία: Απόφοιτοι Γυμνασίου

B' Κατηγορία: Απόφοιτοι Λυκείου

Γ' Κατηγορία: Πτυχιούχοι Ανωτάτης Εκπαίδευσης

Δ' Κατηγορία: Κάτοχοι Μεταπτυχιακού Τίτλου

Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μία μόνον από τις κατηγορίες αυτές.

Στην Α' κατηγορία ανήκει το 25% των εργαζομένων της επιχείρησης. Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της Δ' κατηγορίας είναι 18° . Οι εργαζόμενοι της επιχείρησης της Β' κατηγορίας είναι εξαπλάσιοι των εργαζομένων της Γ' κατηγορίας.

α. Να υπολογίσετε τον αριθμό των εργαζομένων κάθε κατηγορίας.

Μονάδες 20

β. Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Στις 12 το μεσημέρι, η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) δύο πόλεων Α και Β, το τελευταίο δεκαήμερο του Μαρτίου, ήταν :

Πόλη	A:	20	18	20	17	18	17	16	17	16	10
Πόλη	B:	18	16	17	15	16	12	16	17	20	22

α. Να βρείτε τη μέση, τη διάμεσο και την επικρατούσα θερμοκρασία των πόλεων Α και Β.

Μονάδες 9

β. Αν η τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών (σε βαθμούς Κελσίου) των πόλεων Α και Β είναι $s_A = 2,66$ και $s_B = 2,59$ αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε σε ποια από τις δύο πόλεις οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.

Μονάδες 6

γ. Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη Α παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς.

Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερμοκρασίες της πόλης Α, να βρείτε σε ποια από τις δύο πόλεις Α και Β οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ!!!!

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Α΄ ΟΜΑΔΑ)

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 11 Απριλίου 2012

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Τι ονομάζεται συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής; (5 μονάδες)
- A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α) Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας CV είναι μικρότερος από 10% ο πληθυσμός θεωρείται ομοιογενής.
 - β) Ισχύει: $(\sin x)' = \eta \mu x$.
 - γ) Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .
 - δ) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και είναι $l \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = l^v$, $v \in \mathbb{N}$.
 - ε) Ισχύει ότι $\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^\beta f(x) dx$ όπου $\alpha < \gamma < \beta$. (2X5=10 μονάδες)
- A3. Να συμπληρώσετε τις πιο κάτω ισότητες αφού τις μεταφέρετε στο τετράδιό σας.
- α) $(e^{-x})' = \dots$
 - β) Αν $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο A και $g \neq 0$ τότε $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dots$
 - γ) Το κέντρο κάθε κλάσης ενός δείγματος ισούται με των άκρων της κλάσης.
 - δ) Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα v_i μιας μεταβλητής X με το μέγεθος n του δείγματος προκύπτει η της τιμής x_i .
 - ε) $\int_a^\beta \sin x dx = \dots$ (2X5=10 μονάδες)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012

Ε_3.ΜΕΛ3Α(ε)

ΘΕΜΑ Β

Οι τιμές πέντε βιβλίων σε ευρώ είναι 8, $12 + \alpha$, 20, $10 + \alpha$, 16 όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ με

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{2x - 4}.$$

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

(7 μονάδες)

B2. Να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων.

(5 μονάδες)

B3. Να υπολογίσετε τη διάμεσο και το εύρος των παρατηρήσεων.

(6 μονάδες)

B4. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 10}{2(x^2 - 2x)}, & x > 2 \\ \frac{x - \lambda}{4}, & x \leq 2 \end{cases}$ όπου λ πραγματικός αριθμός.

Γ1. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

(8 μονάδες)

Γ2. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

(5 μονάδες)

Γ3. Να υπολογιστεί η τιμή του λ , αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

(5 μονάδες)

Γ4. Για $\lambda = 5$ να υπολογίσετε το $\int_{\lambda-4}^2 \frac{(\lambda-2)x^3 + 2x^2 - 7x + 1}{x} dx$.

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x + \alpha x$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρεθεί το α ώστε $f(1) = -1$.

(5 μονάδες)

Δ2. Για $\alpha = -1$:

i. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.

(8 μονάδες)

ii. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης.

(5 μονάδες)

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cdot f'(x)}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$.

(7 μονάδες)

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Α΄ ΟΜΑΔΑ)

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 11 Απριλίου 2012

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Τι ονομάζεται συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής; (5 μονάδες)

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας CV είναι μικρότερος από 10% ο πληθυσμός θεωρείται ομοιογενής.

β) Ισχύει: $(\sin x)' = \eta \mu x$.

γ) Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, b) .

δ) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και είναι $l \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = l^v$, $v \in \mathbb{N}$.

ε) Ισχύει ότι $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ όπου $a < c < b$.

(2X5=10 μονάδες)

A3. Να συμπληρώσετε τις πιο κάτω ισότητες αφού τις μεταφέρετε στο τετράδιό σας.

α) $(e^{-x})' = \dots$

β) Αν $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο A και $g \neq 0$ τότε

$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dots$

γ) Το κέντρο κάθε κλάσης ενός δείγματος ισούται με των άκρων της κλάσης.

δ) Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα v_i μιας μεταβλητής X με το μέγεθος n του δείγματος προκύπτει η της τιμής x_i .

ε) $\int_a^b \sin x dx = \dots$

(2X5=10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Οι τιμές πέντε βιβλίων σε ευρώ είναι $8, 12 + \alpha, 20, 10 + \alpha, 16$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ με

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{2x - 4}.$$

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

(7 μονάδες)

B2. Να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων.

(5 μονάδες)

B3. Να υπολογίσετε τη διάμεσο και το εύρος των παρατηρήσεων.

(6 μονάδες)

B4. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 10}{2(x^2 - 2x)}, & x > 2 \\ \frac{x - \lambda}{4}, & x \leq 2 \end{cases}$ όπου λ πραγματικός αριθμός.

Γ1. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

(8 μονάδες)

Γ2. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

(5 μονάδες)

Γ3. Να υπολογιστεί η τιμή του λ , αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

(5 μονάδες)

Γ4. Για $\lambda = 5$ να υπολογίσετε το $\int_{\lambda-4}^2 \frac{(\lambda-2)x^3 + 2x^2 - 7x + 1}{x} dx$.

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x + \alpha x$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρεθεί το α ώστε $f(1) = -1$.

(5 μονάδες)

Δ2. Για $\alpha = -1$:

i. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.

(8 μονάδες)

ii. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης.

(5 μονάδες)

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cdot f'(x)}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$.

(7 μονάδες)

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Α΄ ΟΜΑΔΑ)

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 11 Απριλίου 2012

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Τι ονομάζεται συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής; (5 μονάδες)

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας CV είναι μικρότερος από 10% ο πληθυσμός θεωρείται ομοιογενής.

β) Ισχύει: $(\sin x)' = \eta \mu x$.

γ) Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, b) .

δ) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και είναι $l \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = l^v$, $v \in \mathbb{N}$.

ε) Ισχύει ότι $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ όπου $a < c < b$.

(2X5=10 μονάδες)

A3. Να συμπληρώσετε τις πιο κάτω ισότητες αφού τις μεταφέρετε στο τετράδιό σας.

α) $(e^{-x})' = \dots$

β) Αν $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο A και $g \neq 0$ τότε

$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dots$

γ) Το κέντρο κάθε κλάσης ενός δείγματος ισούται με των άκρων της κλάσης.

δ) Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα v_i μιας μεταβλητής X με το μέγεθος n του δείγματος προκύπτει η της τιμής x_i .

ε) $\int_a^b \sin x dx = \dots$

(2X5=10 μονάδες)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012

Ε_3.ΜΕΛ3Α(ε)

ΘΕΜΑ Β

Οι τιμές πέντε βιβλίων σε ευρώ είναι 8, $12 + \alpha$, 20, $10 + \alpha$, 16 όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ με

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{2x - 4}.$$

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

(7 μονάδες)

B2. Να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων.

(5 μονάδες)

B3. Να υπολογίσετε τη διάμεσο και το εύρος των παρατηρήσεων.

(6 μονάδες)

B4. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 10}{2(x^2 - 2x)}, & x > 2 \\ \frac{x - \lambda}{4}, & x \leq 2 \end{cases}$ όπου λ πραγματικός αριθμός.

Γ1. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

(8 μονάδες)

Γ2. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

(5 μονάδες)

Γ3. Να υπολογιστεί η τιμή του λ , αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

(5 μονάδες)

Γ4. Για $\lambda = 5$ να υπολογίσετε το $\int_{\lambda-4}^2 \frac{(\lambda-2)x^3 + 2x^2 - 7x + 1}{x} dx$.

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x + \alpha x$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρεθεί το α ώστε $f(1) = -1$.

(5 μονάδες)

Δ2. Για $\alpha = -1$:

i. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.

(8 μονάδες)

ii. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης.

(5 μονάδες)

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cdot f'(x)}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$

(7 μονάδες)



ΕΠΑ.Λ, Α' ΟΜΑΔΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Δίνεται ένα δείγμα n παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά. Τι ονομάζεται διάμεσος του δείγματος;

Μονάδες 5

- A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Αν μια μεταβλητή παίρνει τις n τιμές $t_1, t_2, \dots, t_n$ που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ τότε διακύμανση της μεταβλητής ονομάζεται το πηλίκο

$$s^2 = \frac{(\bar{x} - t_1)^2 + (\bar{x} - t_2)^2 + \dots + (\bar{x} - t_n)^2}{n}$$

Μονάδες 3

- β)** Η διακύμανση εκφράζεται με τις μονάδες μέτρησης της μεταβλητής.

Μονάδες 3

- γ)** Αν για την f υπάρχουν το $f(x_0)$ και το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ τότε η f είναι συνεχής στο x_0 .

Μονάδες 3

- δ)** Αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα (α, β) που περιέχει το x_0 τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο x_0 .

Μονάδες 3

- A3.** Για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις να γράψετε στο τετράδιο σας την παράγουσα συνάρτησή της F .

α) $f(x) = 1, x \in \mathbb{R}$

β) $f(x) = x^\alpha$ με $\alpha \neq -1$ και $x > 0$

γ) $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$

δ) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Οι θερμοκρασίες που μετρήθηκαν στις 12 το μεσημέρι σε μια πόλη δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Θερμοκρασία x_i ($^{\circ}\text{C}$)	Πλήθος ημερών (v_i)
-1	8
0	12
1	10
2	v_4
3	8

B1. Αν η μέση θερμοκρασία είναι $\bar{x} = 1^{\circ}\text{C}$ να δείξετε ότι $v_4 = 12$.

Μονάδες 8

B2. Να μεταφέρετε τον πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε με τις στήλες της σχετικής συχνότητας, της αθροιστικής συχνότητας και της αθροιστικής σχετικής συχνότητας.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε την επικρατούσα τιμή και τη διάμεσο.

Μονάδες 6

B4. Για πόσες ημέρες η θερμοκρασία ήταν το πολύ 0°C ; Ποιο το ποσοστό των ημερών με θερμοκρασία τουλάχιστον 2°C ;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + \lambda, & x \leq 1 \\ x + \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$

Γ1. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ να βρείτε το λ .

Μονάδες 5

Για $\lambda = 6$

Γ2. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x^3 - x}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(9)}{\sqrt{x+2} - 1}$.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^4 f(x) dx$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot x^3 + \beta \cdot x^2 + (\alpha + 2)x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Δ1. Βρείτε τις παραγώγους $f'(x)$, $f''(x)$.

Μονάδες 4

Δ2. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_1 = 1$ και ισχύει $f''(0) = 2$ να δείξετε ότι $\alpha = -1$, $\beta = 1$.

Μονάδες 6

Για $\alpha = -1$, $\beta = 1$:

Δ3. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον x -άξονα και τις κατακόρυφες ευθείες $x = 2$ και $x = 3$.

Μονάδες 8

ΕΠ.Α.
Α' ΟΜΑΔΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. α) Δίνεται συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, ($A \subseteq \mathbb{R}$) και $x_0 \in A$. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ; (5 μονάδες)

β) Δίνεται συνάρτηση $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (a, b)$; (5 μονάδες)

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **ΣΩΣΤΟ** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με παράγουσα συνάρτηση F .

Τότε ισχύει: $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. (3 μονάδες)

β) Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A$ και η g παραγωγίσιμη σε κάθε $f(x) \in B$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει ότι: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. (3 μονάδες)

γ) Οι παράγουσες της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ είναι οι συναρτήσεις F με $F(x) = \ln x + c$, c σταθερά. (3 μονάδες)

Γ. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α) Ο τύπος $f_i = \frac{v_i}{v}$ υπολογίζει:

- A: τη σχετική συχνότητα %. f_i
 B: τη σχετική συχνότητα. f_i
 Γ: τη μέση τιμή. $\bar{x}$
 Δ: την αθροιστική συχνότητα. N_i
 E: την αθροιστική σχετική συχνότητα. F_i

(3 μονάδες)

β) Ένας πληθυσμός είναι ομοιογενής όταν ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι:

A: $CV > 10\%$. $\checkmark$

B: $CV \leq 10\%$. $\checkmark$

Γ: $CV = 10\%$. $\checkmark$

Δ: $CV \geq 10\%$. $\checkmark$

Ε: $CV < 10\%$. $\bigcirc$

(3 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2°

Μια μεταβλητή παίρνει τις τιμές: 10, 11, 12, 13, 14, ω , $\omega + 1$, 16, 18

α) Αν η μέση τιμή τους είναι $\bar{x} = 13$, να αποδείξετε ότι $\omega = 11$.

(5 μονάδες)

β) Για $\omega = 11$ να βρείτε:

i) τη διάμεσο, $\checkmark$

(5 μονάδες)

ii) το εύρος των τιμών, $\checkmark$

(5 μονάδες)

iii) την επικρατούσα τιμή, $\checkmark$

(5 μονάδες)

iv) είναι το δείγμα ομοιογενές; $CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100$

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(5 μονάδες)

β) Να βρείτε την $f'(x)$ και την $f''(x)$

(12 μονάδες)

γ) Να αποδείξετε ότι: $xf'''(x) + 2f''(x) + xf'(x) = 0$.

(8 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 - \beta x + \alpha$, όπου: $\alpha = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

και $\beta = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{x}$.

- α) Να υπολογίσετε την τιμή των πραγματικών αριθμών α και β . (7 μονάδες)
- β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 3$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (10 μονάδες)
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f' , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$. (8 μονάδες)



Γ' ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΠΑ.Λ

Α' ΟΜΑΔΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Πότε μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(10 μονάδες)

- B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ΣΩΣΤΟ αν η πρόταση είναι σωστή, ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε θα είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(3 μονάδες)

- β. Αν οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους A , τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ ($g \neq 0$) είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

(3 μονάδες)

- γ. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(3 μονάδες)

- δ. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε

$$f'(x_0) = 0.$$

(3 μονάδες)

- ε. Αν $f'(x) = e^x$ τότε $f(x) = e^x$

(3 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

- α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και να εξετασθεί αν είναι συνεχής σε αυτό.
(6 μονάδες)
- β. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
(7 μονάδες)
- γ. Να βρεθούν οι $f'(x)$ και $f''(x)$
(7 μονάδες)
- δ. Να υπολογισθεί το $\int_1^2 f'(x) dx$
(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = ax^4 - 2x^3 + b$ και $x \in [-2, 2]$.

- α. Να βρεθούν οι αριθμοί $a, b \in \mathbb{R}$, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0, 5)$ και η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = -1$.
(10 μονάδες)
- β. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
(10 μονάδες)
- γ. Να υπολογισθεί το $\int_{-2}^2 f(x) dx$
(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4°

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις ηλικίες των εικοσιπέντε κολυμβητών ενός συλλόγου μιας πόλης:

Ηλικίες	Συχνότητα
[16, 20)	3
[20, 24)	5
[24, 28)	
[28, 32)	7
[32, 36)	

- α. Αν η συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι τετραπλάσια από τη συχνότητα της πέμπτης κλάσης, να βρεθεί η μέση τιμή. (5 μονάδες)
- β. Να βρεθεί η επικρατούσα τιμή. (5 μονάδες)
- γ. Να βρεθεί η διάμεσος. (5 μονάδες)
- δ. Να βρεθούν η διακύμανση και η τυπική απόκλιση. (5 μονάδες)
- ε. Να εξετασθεί αν είναι το δείγμα ομοιογενές. (5 μονάδες)

ΘΕΜΑΤΑ
ΟΕΦΕ
2009